

# Оптимизация толстостенной железобетонной оболочки на основе решения обратной задачи механики неоднородных тел

Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, А.В. Муханов

В настоящее время толстостенные оболочки находят широкое применение в конструкциях радиационно-тепловых экранов ядерных реакторов, тепловых и биологических защит и т.д. Вопросам оптимизации таких оболочек, а также других конструкций, посвящены работы[1-10]. Все указанные работы базируются на идеях академика РААСН В.И. Андреева[1].

Известно, что если в некоторой области конструкции уменьшить модуль упругости, то и напряжения в этой области уменьшатся[1,2]. Таким образом, варьируя модуль упругости, можно добиться, чтобы напряжения во всех точках конструкции были постоянны.

Рассмотрим способ оптимизации на примере толстостенной предварительно напряженной железобетонной цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением  $p_a$ . Предварительные напряжения в таких конструкциях, как правило, создаются намоткой с натягом тросов по внешней поверхности. Решим сначала прямую задачу: определим, какие напряжения будут возникать в толще конструкции, если модуль упругости бетона постоянен. Расчетная схема оболочки представлена на рис. 1. Действие арматуры заменяем внешним контактным давлением  $p_b$ .

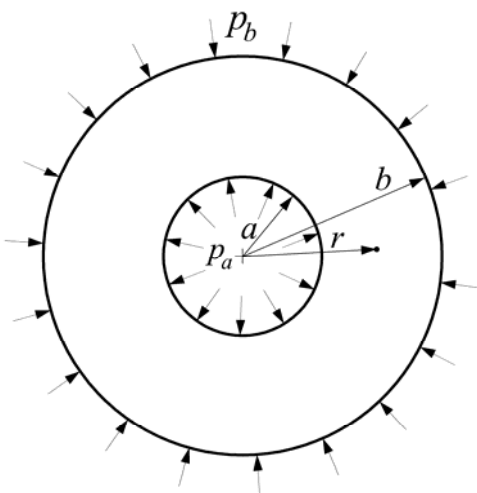


Рис.1. Расчетная схема оболочки.

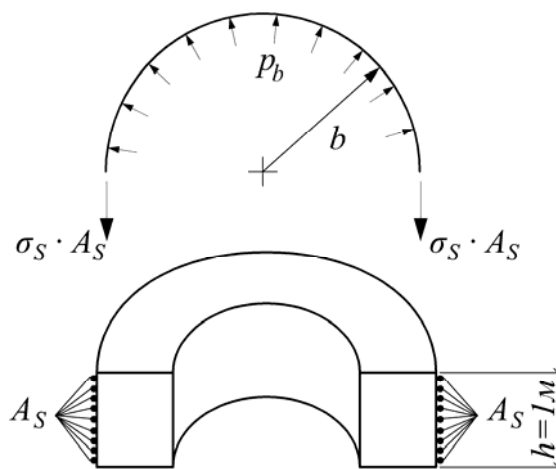


Рис. 2. К определению давления  $p_b$ .

Будем считать, что цилиндр достаточно длинный, т.е. он находится в условиях плоской деформации ( $\varepsilon_z = 0$ ). Величину  $p_b$  можно определить из условия равновесия его половины (рис.2).

$$2\sigma_S A_S = h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_b b \cos \varphi d\varphi = 2p_b b h \Rightarrow \sigma_S = \frac{p_b b h}{A_S} \quad (1)$$

Напряжения в кольцевой арматуре определяются выражением:

$$\sigma_S = E_S \varepsilon_{\theta}|_{r=b} + \sigma_{sp}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{sp}$  - начальные напряжения в кольцевой арматуре (до момента передачи усилий на бетон).

Из решения задачи Ляме для случая плоской деформации известна формула для перемещений  $u(r)$ :

$$u = \frac{(p_a a^2 - p_b b^2)(1 - \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_{b1}} r - \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2 (1 + \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_{b1}} \frac{1}{r}, \quad (3)$$

где  $E_{b1} = \frac{E_b}{1 - \nu^2}$ ,  $\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$ .

Тогда выражение для окружной деформации можно записать в виде:

$$\varepsilon_{\theta}|_{r=b} = \frac{u|_{r=b}}{b} = \frac{(p_a a^2 - p_b b^2)(1 - \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_{b1}} - \frac{(p_b - p_a)a^2 (1 + \nu_1)}{(b^2 - a^2)E_{b1}}, \quad (4)$$

Подставив выражения (4) и (1) в (2), после некоторых преобразований получим формулу для контактного давления:

$$p_b = \frac{\frac{2p_a a^2}{(b^2 - a^2)E_{b1}} + \frac{\sigma_{sp}}{E_S}}{\frac{bh}{A_S E_S} + \frac{1}{E_{b1}(b^2 - a^2)}} (b^2(1 - \nu_1) + a^2(1 + \nu_1)). \quad (5)$$

Далее, чтобы определить напряжения  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$  в бетоне, нужно подставить значение  $p_b$  в известные формулы для задачи Ляме.

На рис. 3 показан график распределения напряжений  $\sigma_{\theta}$  при  $p_a = 10$  МПа,  $a = 1$  м,  $b = 1.5$  м,  $\nu = 0.2$ ,  $E_b = 3.1 \cdot 10^4$  МПа,  $E_S = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{sp} = 500$  МПа.

Чтобы не возникало растягивающих напряжений, для рассматриваемого примера потребовалось 1622 кг арматуры на 1 метр длины трубы. Как видно из графика,  $\sigma_\theta = 0$  только при  $r = a$ , т.е. предельное состояние в этом случае наступает только у внутренней поверхности.

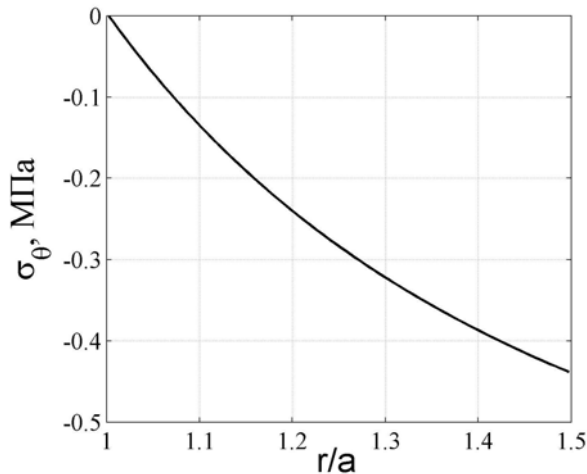


Рис. 3. График распределения напряжений  $\sigma_\theta$  для однородного цилиндра

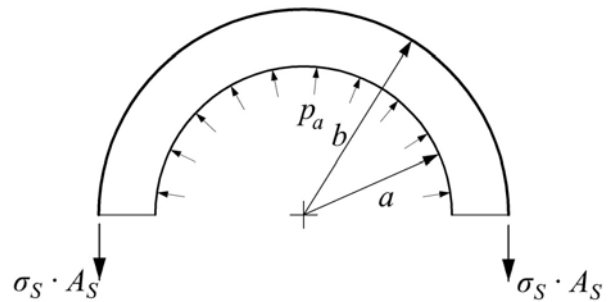


Рис. 4. Равновесие отсеченной половины оболочки

Найдем такое распределение модуля упругости, при котором  $\sigma_\theta = 0$  во всей толще цилиндра. Рассмотрим равновесие его половины (рис. 4).

$$2\sigma_S A_S = h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_a \cdot a \cdot \cos\varphi d\varphi = 2p_a \cdot a \cdot h$$

Но из (1):  $2\sigma_S A_S = 2p_b \cdot b \cdot h$ . Тогда  $p_b = p_a \cdot a / b$ . Зависимость модуля упругости, при которой  $\sigma_\theta = const$  во всей толще цилиндра, нагруженного внутренним давлением  $p_a$  и внешним давлением  $p_b$ , имеет вид[1]:

$$E(r) = E_0 \left( \frac{r}{a} \cdot \frac{A(1-m) - ma\sigma_0}{A(1-m) - mr\sigma_0} \right)^{\frac{1}{1-m}}, \quad (6)$$

где  $E_0 = E(a)$ ,  $A = (p_b - p_a)ab / (b - a)$ ,  $m = (1 - 2\nu) / (1 - \nu)$ .

Подставив  $p_b = p_a \cdot a / b$  в (6), получим:  $E(r) = E_0 (r / a)^{\frac{1}{1-m}}$ .

Остается определить требуемую площадь арматуры, при которой  $\sigma_\theta = 0$ .

$$p_a a h = \sigma_S A_S = (\sigma_{SP} + E_S \varepsilon_{\theta}|_{r=b}) A_S. \quad (7)$$

Окружную деформацию бетона на внешней поверхности можно найти следующим образом:

$$\varepsilon_{\theta}|_{r=b} = \frac{1}{E_b|_{r=b}} (\sigma_{\theta} - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) = \frac{1}{E_b|_{r=b}} \{ \sigma_{\theta} - \nu[\sigma_r + \nu(\sigma_r + \sigma_{\theta})] \}.$$

С учетом того, что  $\sigma_{\theta} = 0$ , а  $\sigma_r|_{r=b} = -p_b$ , получим:

$$\varepsilon_{\theta}|_{r=b} = \frac{p_b}{E_b|_{r=b}} (\nu + \nu^2) = \frac{p_a \cdot a}{b \cdot E_b|_{r=b}} (\nu + \nu^2) \quad (8)$$

Подставив (8) в (7), получим требуемую площадь арматуры:

$$A_S = \frac{p_a \cdot a \cdot h}{\sigma_{sp} + \frac{E_S}{E_b|_{r=b}} \cdot \frac{p_a a}{b} (\nu + \nu^2)}. \quad (9)$$

На рис. 5. представлена кривая  $E(r)$  для оптимального цилиндра. Исходные данные были взяты те же, что и для однородной оболочки.

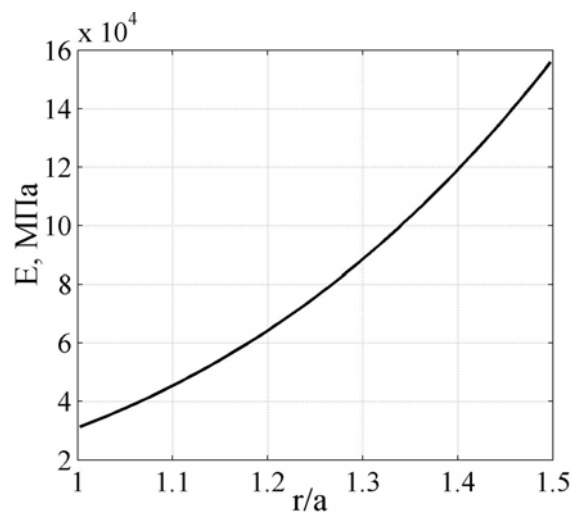


Рис. 5. График зависимости  $E(r)$  для оптимального цилиндра

Для неоднородного цилиндра потребовалось 1473 кг арматуры на 1 м длины трубы. Экономия арматуры при создании искусственной неоднородности составила 10.1%.

### Литература:

1. Андреев В.И. Потехин И.А. Оптимизация по прочности толстостенных оболочек: монография. М.: МГСУ, 2011. – 86с.

2. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография. – М.: Издательство АСВ, 2002. – 288 с.

3. Потехин И.А. Способ оптимизации конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел. Дисс. канд. техн. наук. М., 2009. - 144 с.

4. Andreev V.I. About one way of optimization of the thick-walled shells. Applied Mechanics and Materials, Vols.166-169 (2012) pp. 354-358

5. Андреев В.И., Булушев С.В. Оптимизация неоднородной толстостенной сферической оболочки, находящейся в температурном поле. Вестник МГСУ, 2012, №12, стр. 40-46.

6. Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies. Computer Aided Optimum Design in Engineering XII (OPTI XII). WIT Press. 2012, p.189-201

7. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнопрочной многопролетной балки [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, №1. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1571> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

8. Чепурненко А.С., Языев Б.М. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости//Научное обозрение. 2012. № 6. — С. 202-204.

9. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе теории прочности Мора //Вестник МГСУ. №5 2013, с.56-61.

10. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, №2. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.