Применение метода конечных разностей к задачам изгиба прямоугольных плит на упругом основании

Е.В. Барменкова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация: В статье рассматриваются актуальные вопросы строительного проектирования, связанные с расчетом железобетонных фундаментных плит. Изложены принципы расчета фундаментных плит на упругом основании методом конечных разностей. Выполнены расчеты прямоугольной плиты на упругом основании методом конечных разностей, произведена верификация результатов расчетов методом конечных разностей на основании их сравнения с результатами расчетов, выполненных с помощью двойных тригонометрических рядов. Осуществлено исследование степени дискретизации конечно-разностной сетки на точность результатов расчетов.
Ключевые слова: метод конечных разностей, фундаментная плита на упругом основании, коэффициент постели, уравнение изгиба пластины, конечно-разностный оператор.

Введение

Современные здания и сооружения представляют собой сложные многоэлементные строительные конструкции. Необходимость предварительного анализа напряженно-деформированного состояния фундаментов здания и сооружения является наиболее важной задачей на стадии проектных работ. Для этого используются различные методы и модели расчета. В основном модели для расчета представляют собой балку или плиту на упругом основании, которое характеризует грунтовое основание. Расчетам конструкций на упругом основании посвящены работы Н.П. Пузыревского, Н.К. Снитко, Б.Г. Коренева, В.З. Власова, Н.Н. Леонтьева, П.Л. Пастернака, К.Г. Шашкина, Б.Н. Жемочкина, И.А. Симвулиди, М.И. Горбунова-Посадова, С.Н. Клепикова и др.

Большинство задач строительной механики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов (стержней, пластин, оболочек) сводится, как правило, к решению одного или нескольких дифференциальных уравнений равновесия элемента, соответственно с одним или несколькими неизвестными. Точное решение таких уравнений не представляет затруднений лишь в некоторых элементарных случаях. При решении реальных задач приходится прибегать к приближенным методам решения. В настоящее время широкое распространение получили численные методы расчета: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ). В.И. Соломиным одним из первых был применен метод конечных разностей для расчета плит на упругом основании. Известно, к настоящему времени разработано большое количество программных средств для проектирования фундаментных плит, в основе которых лежит метод конечных элементов. Сравнительному анализу МКР и МКЭ и обоснованности применения этих методов к расчету конструкций посвящены различные работы [1, 2]. Так, в своей работе Е.И. Мелешенков и В.А. Ожерельев приводят сравнение результатов, полученных методом конечных разностей и методом конечных элементов, в качестве расчетной модели рассматривая пластину на упругом основании.

Настоящая статья посвящена применению метода конечных разностей (МКР) для решения практически важных задач, связанных с расчетом фундаментных плит на упругом основании.

Для решения задачи изгиба плиты на упругом основании необходимо ввести предположение о зависимости между реактивным отпором и осадкой поверхности основания. Гипотеза Винклера – это наиболее простая и часто используемая на практике модель упругого основания. Её суть заключается в линейной зависимости между реактивным отпором основания и осадкой его поверхности [3 - 5].

В соответствии с гипотезой Винклера дифференциальное уравнение изгиба пластины, являющейся расчетной схемой фундаментной плиты, примет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y) - kw}{D}. \qquad (1)$$

где *q(x,y)* – интенсивность внешней распределенной нагрузки на плиту, *k* – коэффициент постели (коэффициент жесткости упругого основания), *D* – цилиндрическая жесткость пластины.

Это уравнение может быть решено для случая прямоугольных плит при помощи двойных тригонометрических рядов или численными методами, например, методом конечных разностей.

1. Расчет плиты методом конечных разностей

В методе конечных разностей на рассматриваемую плиту наносится сетка линий [6 - 8]. Неизвестными в точках сетки (узлах) являются значения прогибов, относительно которых справедливо дифференциальное разрешающее уравнение теории изгиба пластин (1).

Рассмотрим сетку с одинаковым шагом *s* (рис. 1, а). Тогда, накладывая оператор (рис. 1, б) в точку *i*, представим уравнение (1) в виде:

$$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q_i - kw_i}{D}s^4. \quad (2)$$

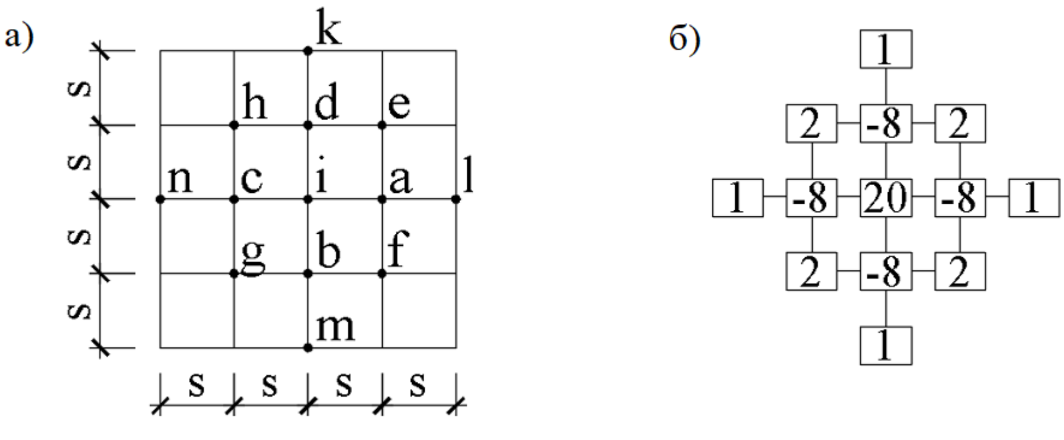

Рисунок 1 – Схема буквенного обозначения точек сетки (а) и передвижной оператор (б).

Для каждой точки контура плиты необходимо записать два граничных условия. В итоге, с помощью замены производных конечно-разностными формулами во всех точках мы приходим к разрешающей системе линейных алгебраических уравнений вида (2). Она должна содержать столько уравнений, сколько неизвестно прогибов в точках плиты.

Следует отметить, кроме значений прогибов внутри, в уравнения войдут значения прогибов «законтурных точек». Чтобы их найти, необходимо учесть закрепление плиты по границам.

После решения системы алгебраических уравнений и определения значений прогибов в узлах сетки, вычисляют внутренние усилия, используя соответствующий каждому внутреннему усилию конечно-разностный аналог.

2. Расчет с помощью двойных тригонометрических рядов

Решение задачи о поперечном изгибе в двойных тригонометрических рядах (решение Навье) предусмотрено для шарнирно опертой по всему контуру пластины, на которую оказывают действие произвольные поперечные нагрузки [4 - 6].

При действии равномерно распределённой по всей поверхности нагрузки $q = \mathrm{const}$ выражение для прогиба плиты имеет вид

$$w(x,y) = \frac{16q}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left[D\pi^4\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2+k\right]} \qquad (3)$$

где m и n – только нечетные числа (m, n = 1, 3, 5,…).

3. Решение задачи изгиба плиты на упругом основании

Рассмотрим задачу изгиба квадратной плиты на упругом основании с постоянным коэффициентом постели, шарнирно опертой по всему контуру и находящейся под действием нагрузки интенсивностью q, равномерно распределенной по всей площади. Определим наибольшие значения прогиба и внутренних усилий при коэффициентах постели равных: а) k = 0; б)

$k = 2000 \,{}^{\text{кН}}/_{\text{м}^3}$, в) $k = 20000 \,{}^{\text{кН}}/_{\text{м}^3}$. В расчетах примем: $l = 4$ м, $q = 20 \,{}^{\text{кН}}/_{\text{м}^2}$, $h = 0{,}2$ м, $\mu = 0{,}2$, $E = 2 \cdot 10^7 \,{}^{\text{кН}}/_{\text{м}^2}$.

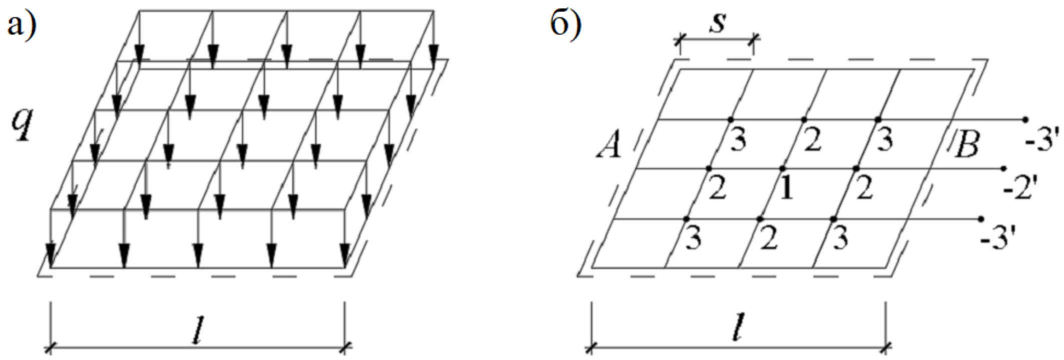

Рисунок 2 – Квадратная шарнирно опертая плита под действием равномерно распределенной нагрузки (а) с нанесенной на нее сеткой узлов (б).

Произведем расчет плиты на упругом основании методом конечных разностей, а также с помощью двойных тригонометрических рядов, осуществим исследование степени дискретизации конечно-разностной сетки на точность расчетов методом конечных разностей.

Используя (2), решим дифференциальное уравнение изгиба пластины (1) методом конечных разностей. Разбиваем плиту на четыре равные части с шагом $s = 1$ и в силу симметрии относительно осей Ox и Oy получаем три узловые точки (рис. 2, б). Перемещая по ним оператор (3) и учитывая условия закрепления плиты ($w_{2'} = -w_2; w_{3'} = -w_3$), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(20 + \dfrac{ks^4}{D}\right) w_1 - 32w_2 + 8w_3 = \dfrac{qs^4}{D}; \\ -8w_1 + \left(24 + \dfrac{ks^4}{D}\right) w_2 - 16w_3 = \dfrac{qs^4}{D}; \\ 2w_1 - 16w_2 + \left(20 + \dfrac{ks^4}{D}\right) w_3 = \dfrac{qs^4}{D}. \end{cases}$$

Из системы определяем значения прогибов в узлах сетки при различных значениях k:

а) $k = 0$: $w_1 = 0{,}1485$ см; $w_2 = 0{,}108$ см; $w_3 = 0{,}0788$ см;

б) $k = 2000$ кН/м^3: $w_1 = 0{,}134$ см; $w_2 = 0{,}0977$ см; $w_3 = 0{,}0715$ см;

в) $k = 20000$ кН/м^3: $w_1 = 0{,}071$ см; $w_2 = 0{,}053$ см; $w_3 = 0{,}039$ см.

Зная прогибы во всех узлах плиты, определяем значения внутренних усилий в точке i по формулам [9, 10]:

$$M_{xi} = -\frac{D}{s^2}[(w_a - 2w_i + w_c) + \mu(w_b - 2w_i + w_d)];$$

$$M_{yi} = -\frac{D}{s^2}[(w_b - 2w_i + w_d) + \mu(w_a - 2w_i + w_c)];$$

$$M_{xyi} = -\frac{D}{4s^2}(1-\mu)[w_f + w_h - w_g - w_e];$$

$$Q_{xi} = \frac{D}{2s^3}[4(w_a - w_c) + w_h + w_n + w_g - (w_l + w_e + w_f)];$$

$$Q_{yi} = \frac{D}{2s^3}[4(w_d - w_b) + w_g + w_m + w_f - (w_h + w_k + w_e)].$$

Ниже приведены значения изгибающих моментов для точек 1 и 2:

а) $k = 0$: $M_{x1} = 13{,}5$ кНм/м; $M_{x2} = 11{,}0$ кНм/м;

б) $k = 2000$ кН/м^3: $M_{x1} = 12{,}1$ кНм/м; $M_{x2} = 9{,}9$ кНм/м;

в) $k = 20000$ кН/м^3: $M_{x1} = 5{,}98$ кНм/м; $M_{x2} = 5{,}56$ кНм/м.

Применяя сетку, состоящую из 16 частей (4x4), система алгебраических уравнений удобна для вычислений, но при этом сам расчет теряет точность. Чтобы устранить данный недостаток, необходимо увеличить степень дискретизации и, как следствие, повысить точность расчетов.

В таблице 1 приведен сравнительный анализ результатов расчета при разбиении плиты сеткой 4x4 и 8x8, т.е. на 16 и на 64 части, соответственно, также в таблице приводятся результаты расчетов, выполненных с помощью двойных тригонометрических рядов (3). Показаны наибольшие значения прогибов, изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил с учетом различных коэффициентов постели упругого основания. Следует отметить, наибольшие значения прогиб и изгибающие моменты имеют в центре пластины, крутящий момент в угловых точках, поперечные силы в серединах сторон.

Делаем вывод, расчет плиты методом конечных разностей на принятой грубой сетке (4x4) дает удовлетворительные результаты в отношении прогибов и изгибающих моментов. Для лучшей достоверности получаемых значений поперечных сил и крутящих моментов следует производить расчет, используя сетки с более мелким шагом.

Таблица № 1

Результаты расчетов МКР и с помощью двойных тригонометрических рядов.

Метод расчета	k, кН/м^3	$w^{нб}$, см	$M_x^{нб}(M_y^{нб})$, кНм/м	$M_{xy}^{нб}$, кНм/м	$Q_x^{нб}\ (Q_y^{нб})$, кН/м
МКР (сетка 4x4)	0	0,149	13,50	8,75	17,50
	2000	0,134	12,10	7,94	15,83
	20000	0,071	5,60	4,38	8,50
МКР (сетка 8x8)	0	0,150	13,97	10,86	22,10
	2000	0,136	12,61	9,97	20,33
	20000	0,074	6,39	5,91	12,23
Ряды	0	0,1495	13,86	11,48	22,63
	2000	0,136	12,51	10,57	20,84
	20000	0,075	6,27	6,34	12,50

4. Выводы

На основании представленных результатов расчетов можно сделать следующий вывод. Метод конечных разностей дает вполне достоверные результаты, проведенная верификация результатов расчетов плиты МКР с результатами, полученными с помощью двойных тригонометрических рядов, устанавливает удовлетворительную их сходимость, при этом для обеспечения точности получаемых результатов расчетов методом конечных разностей рекомендуется использовать сетки с более мелким шагом.

В строительном проектировании представленный в работе алгоритм расчета изгибаемых фундаментных плит МКР на упругом основании, описываемом моделью Винклера, реализует практическую потребность в разработке инженерных методов прогноза напряженно-деформированного состояния фундаментных плит с использованием достаточно простых моделей.

Литература

1. Komlev A.A., Makeev S.A. The calculation of rectangular plates on elastic foundation the finite difference method // Journal of Physics: Conference Series, XI International scientific and technical conference "Applied Mechanics and Dynamics Systems". 2018. Volume 944. DOI:10.1088/1742-6596/944/1/012056.

2. Катеринина С.Ю., Катеринина М.А. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкции с разрывными параметрами с использованием различных методов строительной механики // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Строительная информатика. 2014. Вып. 11(32). Ст. 8. URL: vestnik.vgasu.ru/attachments/KaterininaKaterinina.pdf.

3. Егорова Е.С., Иоскевич А.В., Иоскевич В.В., Агишев К.Н., Кожевников В.Ю. Модели грунтов, реализованные в программных комплексах SCAD Office и Plaxis 3D // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2016. №3(42). С. 31-60.

4. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells, 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 1959, 595 p.

5. Ventsel E. Krauthammer Th. Thin plates and shells. Theory, analysis, and applications. New York: Marcel Dekker Inc., 2001, 658 p.

6. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости с пластичности. М.: АСВ. 1995. 568 с.

7. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М: Стройиздат, 1977. 160 с.

8. Чакурин И.А., Комлев А.А., Макеев С.А. Статический расчет конструкций численными методами. Омск: СибАДИ. 2017. 101 с.

9. Веренич А.А., Игнатюк В.И. К расчету изгибаемых плит методом конечных разностей // Вестник Брестского государственного технического университета. 2012. №5. с. 42-46.

10. Сеницкий Ю.Э., Панов В.В., Довгий В.А. Расчет балок-стенок и прямоугольных пластин методом конечных разностей с использованием ЭВМ. Самара: Самарский архитектурно-строительный ин-т. 1991. 73 с.

References

1. Komlev A.A., Makeev S.A. Journal of Physics: Conference Series, XI International scientific and technical conference "Applied Mechanics and Dynamics Systems". 2018. Volume 944. DOI:10.1088/1742-6596/944/1/012056.

2. Katerinina S.Ju., Katerinina M.A. Internet-vestnik VolgGASU. Ser.: Stroitel'naja informatika. 2014. № 11(32). Paper 8. URL: vestnik.vgasu.ru/attachments/KatererininaKaterinina.pdf.

3. Egorova E.S., Ioskevich A.V., Ioskevich V.V., Agishev K.N. Kozhevnikov V.Yu. Stroitel'stvo unikal'nyh zdanij i sooruzhenij. 2016. №3 (42). pp. 31-60.

4. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells, 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 1959, 595 p.

5. Ventsel E. Krauthammer Th. Thin plates and shells. Theory, analysis, and applications. New York: Marcel Dekker Inc., 2001, 658 p.

6. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti [Strength of materials with the fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moskva: ASV. 1995. 568 p.

7. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachah rascheta stroitel'nyh konstruktsij [The grid method in the problems of calculating building structures]. Moskva: Stroyizdat, 1977. 160 p.

8. Chakurin I.A., Komlev A.A., Makeev S.A. Staticheskij raschet konstruktsij chislennymi metodami [Static calculation of structures by numerical methods]. Omsk: SibADI. 2017. 101 p.

9. Verenich A.A., Ignatjuk V.I. Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2012. № 5. p. 42-46.

10. Senickij YU.E., Panov V.V., Dovgij V.A. Raschet balok-stenok i pryamougol'nyh plastin metodom konechnyh raznostej s ispol'zovaniem EVM [Calculation of beam-walls and rectangular plates by the finite difference method with using a computer]. Samara: Samarskij arhitekturno-stroitel'nyj institut. 1991. 73 p.