Калибровка умеренно устойчивых моделей Леви по данным криптовалют Bitcoin и Ethereum

А.С. Гречко[1], О.Е. Кудрявцев[2]

[1]ООО «Парадигма», Ростов-на-Дону
[2]Ростовский филиал Российской таможенной академии

Аннотация: В данной статье мы рассматриваем проблему моделирования динамики таких ведущих криптовалют, как Bitcoin (BTC) и Etherium (ETH). Мы вычисляем логарифмические доходности на основе временных рядов курсов криптовалют и анализируем реализованную степенную вариацию для оценки соответствующего обобщенного индекса Блюменталя-Гетура. Проведенный анализ показывает, что умеренно устойчивые процессы Леви без диффузионной компоненты подходят для моделирования рассмотренных курсов криптовалют. Для получения более точной оценки параметра, который описывает активность скачков логарифмических доходностей мы исключаем влияние сноса, рассматривая вспомогательный ряд приращений исходных логарифмических доходностей.
Ключевые слова: математическое моделирование, криптовалюты, умеренно устойчивые модели Леви, модель CGMY, индекс Блюменталя-Гетура, реализованная степенная вариация

В настоящее время все больше и больше внимания уделяется математическому моделированию рынка криптовалют, капитализация которого достигает сотен млрд. долларов. В отличие от фиатных валют (доллары, евро и др.) или цен на акции, криптовалюты демонстрируют очень высокую волатильность и, тем самым, вызывают большой интерес у трейдеров. Резкие скачки в курсах криптовалют позволяют сделать вывод, что традиционные диффузионные модели не применимы для такого типа цифрового актива, а более естественным кандидатом на эту роль могут быть процессы Леви (см. подробнее [1]. Модели Леви активно применяются, как в финансово-экономических приложениях [2, 3], так и в физических задачах [4]. Напомним, что модель Леви представляет собой стохастически непрерывный процесс с независимыми и стационарными приращениями (подробнее [2, 5]).

Цель данного исследования – предложить новые подходы к подбору параметров умеренно устойчивых процессов Леви по данным о котировках криптовалют.

Существующие подходы калибрования стохастических моделей по данным финансовых рынков, как правило, опираются на цены производных финансовых инструментов – опционов [6, 7]. Однако в случае криптовалют, рынок производных финансовых инструментов развит плохо. В связи с этим, калибровка моделей Леви по ценам опционов будет слабо статистически значима. Альтернативным подходом, устраняющим эту проблему, является подбор параметров модели Леви по искусственным ценам опционов одного касания (one touch options) с барьерами сверху и снизу (подробнее, [1]).

Напомним, что процесс Леви полностью определяется своей характеристической экспонентой ψ, которая находится из представления характеристической функции X_t: $E[e^{i\xi X_t}] = e^{-t\psi(\xi)}$.

Одной из наиболее гибких и популярных процессов Леви является модель CGMY [8], которая входит в более широкий класс умеренно устойчивых процессов Леви (УУПЛ) [2]. Характеристическая экспонента УУПЛ имеет вид:

$$\psi(\xi) - -i\mu\xi + c_+\Gamma(-\nu_+)[\lambda_+{}^{\nu_+} - (\lambda_+ + i\xi)^{\nu_+}]$$

$$+c_-\Gamma(-\nu_-)[(-\lambda_-)^{\nu_-} - (-\lambda_- - i\xi)^{\nu_-}]$$

где $\nu_+, \nu_- \in (0,2), \nu_+, \nu_- \neq 1$, $c_+, c_- > 0$, $\mu \in R$, и $\lambda_+ < -1 < 0 < -\lambda_-$.

Показатели ν_-, ν_+ характеризуют активность скачков положительных и отрицательных скачков, максимальный из которых совпадает с обобщенным индексом Блюменталя-Гетура [9]. Если $c_- = c_+ = c$ и $\nu_- = \nu_+ = \nu$, тогда мы получаем модель CGMY.

В данном исследовании мы рассматривали котировки криптовалют Bitcoin (BTC) и Etherium (ETH), полученные с биржи GDAX за период 2017-2018 годы, с помощью авторского API на языке Python. Для анализа индекса активности мы выбрали период в один торговый день, начинающийся 0:00:00

GMT, и завершающийся в 23:59:59 GMT с поминутными характеристиками курсов криптовалют по отношению к доллару США. Обозначим временной лаг через Δ_n, где *n* – количество разбиений анализируемого периода времени (в нашем случае 1 дня).

На первом этапе подготовки исторических данных в качестве начальной котировки S_0 мы выбираем цену открытия в начале периода (в 0:00:00 GMT текущего дня), а в качестве минутных котировок S_j, *j*=1,…1439 выбираем средневзвешенные цены за текущую минуту. Затем мы строим ряд приращений лог-доходностей $x_j = \ln(S_j/S_{j-1})$. В начале следующего торгового дня мы обновляем значение S_0, заново устанавливаем индекс *j*=1 и повторяем процесс для нового дня.

Будем полагать, что курс криптовалюты описывается экспоненциальной моделью Леви $S_t = S_0 e^{X_t}$. Тогда приращения x_j являются независимыми выборочными значениями случайной величины X_{Δ_n}, в силу определения процесса Леви.

Как и в [2], мы анализируем индекс активности процесса *X* на основе временного ряда логарифмов доходности x_j, чтобы оценить обобщенный индекс Блюменталя-Гетура. Согласно [9], индекс активности процесса определяется по формуле:

$$\beta_{X,t} := \inf\{\, p > 0 : \operatorname{plim}_{\Delta_n \to 0} V_t(X, p, \Delta_n) < \infty\}, \qquad (1)$$

где $V_t(X, p, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{\frac{t}{\Delta_n}} |x_i|^p$ - степенная вариация с показателем *p* и временным шагом Δ_n за период [0,t].

Проведенный анализ показателя $\beta_{X,t}$, показал, что в течение 2017 и

2018 года большинство его значений для исследуемых криптовалют находились в окрестности 1, см. также [10]. Средние значения индекса представлены в третьем столбце таблицы 1.

Напомним, что при $\beta_{X,t} < 2$ гауссова компонента процесса Леви имеет только снос μ. Гауссова компонента полностью отсутствует при $\beta_{X,t} < 1$. В последнем случае, индекс активности характеризует активность скачков.

В нашем случае, снос μ может влиять на оценку индекса $\beta_{X,t}$ (см. формулу (1)). Для более точной оценки обобщенного индекса Блюменталя-Гетура исключим влияние сноса с помощью идеи, предложенной в [10]. Рассмотрим новый ряд $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда характеристическая функция случайной величины, описывающей минутные приращения Δx_i приращений лог-доходностей одинакова для всех i и имеет вид: $E\left[e^{i\xi\Delta x_i}\right] = e^{-\Delta_n \psi(\xi)+\psi(-\xi)}$, где Δ_n соответствует временному интервалу в одну минуту. Характеристическая экспонента соответствующего процесса будет иметь вид $\tilde{\psi}(\xi) = \psi(\xi) + \psi(-\xi)$ [10]. Поскольку $\sigma = 0$, то полученный процесс будет чисто негауссовым, но при этом индекс активности скачков нового процесса будет также равен Y. Вместе с тем, величины $\Delta x_i = (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) - (X_{t_{i-1}} - X_{t_{i-2}})$ и $\Delta x_{i+1} = (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) - (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ не являются независимыми, поэтому методику [9] применять нельзя. Однако, рассмотрев двухминутные промежутки времени мы получаем ряд $\Delta x_i, i = 2,4,6, \ldots$, который можно интерпретировать как выборку значений случайной величины с характеристической функцией $e^{-2\Delta_n \tilde{\psi}(\xi)}$. Средние значения оценки обобщенного индекса Блюменталя-Гетура представлены в четвертом столбце таблицы 1. Полученные значения можно использовать для оценки наибольшего из параметров ν_-, ν_+ умеренно устойчивых процессов Леви.

Таблица № 1

Индексы активности скачков криптовалют bitcoin и etherium

Криптовалюта	Год	Среднее значение индекса активности	Среднее значение индекса скачков
BTC	2017	0.9091	0.8993
BTC	2018	0.7460	0.8149
ETH	2017	0.9579	0.9106
ETH	2018	0.9710	0.9554

Благодарность. *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00910А.*

Литература

1. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Статистические методы калибровки моделей цен криптовалют // Учет и статистика. 2018. №4. С. 67-76.
2. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC.
3. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Методы анализа волатильности российского финансового рынка для широкого класса моделей // Инженерный вестник Дона, 2016, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3924.
4. Мисюра В.В., Мисюра И.В. Обработка и фильтрация сигналов. Современное состояние проблемы // Инженерный вестник Дона. 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
5. Sato, K.I., 1999. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press.
6. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. Journal of Computational Finance, 3: 1–50.

7. Comte, F. and V. Genon-Catalot, 2011. Estimation for Levy processes from high-frequency data within a long time interval. The Annals of Statistics, 2: 803–837.
8. Carr, P., D.B. Madan, H. Geman and M. Yor, 2002. The fine structure of asset returns:An empirical investigation. The Journal of Business, 2: 305–333.
9. Todorov, V. and G. Tauchen, 2010. Activity signature functions for high-frequency data analysis. Journal of Econometrics, 2(154): 125 - 138.
10. Гречко А.С., Кудрявцев О.Е. Калибровка моделей Леви по данным криптовалют bitcoin и ethereum // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 «XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь: "Полипринт", 2019. С. 303-305.

References

1. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Uchet i statistika. 2018. №4. pp. 67-76.
2. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC.
3. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Inzenernyj vestnik Dona, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3924.
4. Misyura V.V., Misyura I.V. Inzenernyj vestnik Dona, 2013, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2130.
5. Sato, K.I., 1999. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge university press.
6. Comte, F. and V. Genon-Catalot, 2011. Estimation for Levy processes from high-frequency data within a long time interval. The Annals of Statistics, 2: 803–837.
7. Cont, R. and P. Tankov, 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. Journal of Computational Finance, 3: 1–50.
8. Carr, P., D.B. Madan, H. Geman and M. Yor, 2002. The Journal of Business, 2: 305–333.
9. Todorov, V. and G. Tauchen, 2010. Journal of Econometrics, 2(154): 125 - 138.
10. Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii KROMSH-2019 «XXX Krymskaya Osennyaya Matematicheskaya Shkola-simpozium po spektral’nym i evolyutsionnym zadacham». Simferopol, 2019, pp. 303-305.