Инженерный вестник Дона, №10 (2024)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n10y2024/9528

Структура плоских стержневых систем

С.А. Кузнецов

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М.И. Платова
Новочеркасск*

Аннотация: Выбор метода силового расчета строительных конструкций предваряется анализом статической определимости и неизменяемости стержневой системы с помощью структурных формул, при этом для разных типов конструкций – для балок, ферм, рам, арок и так далее – источниками предлагаются разные формулы. Показано, что для структурного анализа всех стержневых систем достаточно определить степень аномальности структуры по формуле П.Л. Чебышева. Развитие линейно-монадной теории структуры позволяет формализовать зависимости количества стержней и шарниров от количества внешних и внутренних контуров при синтезе как нормальных, так и аномальных структур.
Ключевые слова: балка, ферма, рама, арка, структура, анализ, синтез, неизменяемость, определимость, степень аномальности, стержни, система, контур, монада, шарнир

Сведения из линейной теории структуры. Статическая определимость строительных систем подразумевает возможность расчета усилий во всех элементах системы с помощью уравнений статики.

В теории механизмов и машин аналогичные задачи решаются в ходе структурного анализа с использованием структурных формул, параметрами которых являются количество звеньев и количество кинематических пар (шарниров). Первая и основополагающая формула структурного анализа носит имя великого математика и механика П.Л. Чебышева; эту формулу он вывел при исследовании шарнирного четырехзвенника [1]:

$$3m - 2(n + v) = 1.$$

Здесь m – количество подвижных звеньев;

n+v – количество подвижных и неподвижных шарниров; если их не разделять, $3m - 2m = 1$, или, в современных обозначениях,

$$3n - 2p = 1,$$

где n – количество звеньев (в строительной механике дисков);

p – количество шарниров.

Результат, равный единице, означает число степеней свободы, точнее, количество входных звеньев (входных связей) для данного механизма, достаточное для его подвижности, с одной стороны, и определенности положения (неизменяемости), - с другой. Для строительных систем, не имеющих подвижности, этот параметр принимается равным нулю. Насколько правомерно отождествление звеньев с дисками? Обратимся к определению В.А. Киселева: «Отдельными элементами плоских стержневых систем являются различного вида стержни… Эти стержни независимо от их конкретной геометрической формы, а также неизменяемые системы, составленные из них, будем называть дисками и изображать их для анализа структуры систем в виде плоской фигуры любой неопределенной формы» [2]. Уточнение В.А. Киселева «Эти стержни независимо от их конкретной геометрической формы…», является явным признаком структурного, а не кинематического исследования. Традиция ошибочно относить структурные исследования к кинематике имеет, видимо, исторические корни [3].

Наконец, большой проблемой является неоправданное многообразие формул для определения «геометрической неизменяемости» стержневых систем в учебниках по строительной механике, причем для каждого типа конструкции опять же применяется разная формула [4-6].

Наибольшего развития и высокой степени формализации структурная теория достигла именно в рамках теории механизмов и машин, где раздел «Структура механизмов» стал базовым не только для определения свойств механизмов, но и для идентификации самой научной дисциплины. Главным признаком структурного уровня исследования как раз и является неиспользование размерных и силовых параметров. Развитие формулы П.Л. Чебышева оказалось возможным в сторону расширения возможных способов подвижного соединения звеньев – к вращательным шарнирам добавились цилиндрические, сферические, а также линейные и точечные кинематические пары, кроме того к числу структурных связей можно отнести входные связи, наложенные на входные звенья (этот параметр для строительных систем неактуален) [7]. Существенным отличием строительных конструкций от механизмов является то, что в механизмах все эти кинематические пары фактически имеют место, а в строительных конструкциях они условны, поскольку в реальности стержни соединяются с помощью сварных, заклепочных соединений и даже зубчатых пластин (для деревянных ферм) [8]. Кроме того, в специфических случаях, при большой длине стержней необходимо учитывать их упругие свойства [9], которые также оказывают влияние на изменяемость системы. В простейшем случае будем использовать только вращательные шарниры без учета входных связей, в этом случае на базе формулы П.Л. Чебышева получаем структурную характеристику «степень аномальности» в укороченном виде:

$$S = 3n - 2p, \tag{1}$$

где n – число подвижных звеньев (стержней или «дисков»);

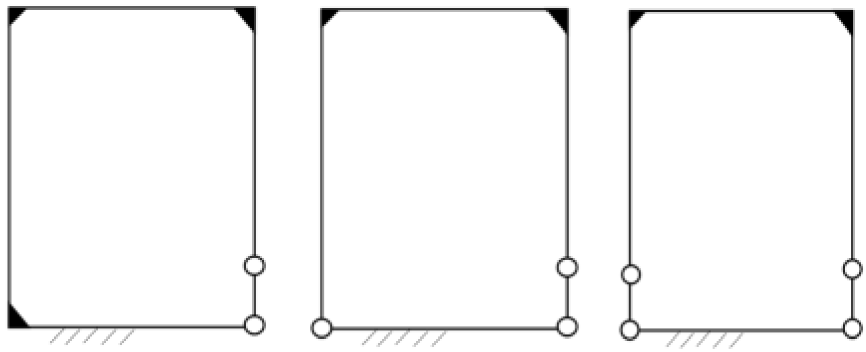
p – количество вращательных шарниров.

Покажем, что данная формула может успешно применяться при структурном анализе как механических, так и строительных систем. Для этого перепишем ее в виде, более привычном для строительной механики, то есть звенья будем обозначать буквой Д, а шарниры буквой Ш. Кроме того, для исследования рам введем параметр П – припайка, с коэффициентом 3, соответствующим неподвижному соединению:

$$W = 3Д - 3П - 2Ш, \tag{2}$$

где под Ш будем понимать количество всех простых шарниров, а не только «внутренних». Если в узле сходятся несколько стержней, то количество простых шарниров на единицу меньше количества стержней. Кроме того, в суммарное число дисков Д необходимо включить и опорные стержни, чтобы в полной мере соответствовать концепции П.Л. Чебышева.

Итак, рассмотрим различные схемы рам, сначала одноконтурных (Рис.1).



а) б) с)

Рис. 1 – Рамы различной степени статической определимости

Первая рама (рис.1, а) содержит четыре диска, включая опорный стержень, три припайки и два шарнира. Неподвижное соединение диска с «землей» входит в число этих трех припаек, что вполне логично. После подстановки данных параметров в формулу (2) получаем единожды статически неопределимую систему, обладающую, тем не менее, геометрической неизменяемостью.

$$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

Проверяем результат по формуле (1), учитывая, что в данной системе только одно звено закреплено подвижно – двухшарнирная опора. Сама рама не может быть отнесена к подвижным звеньям, так как закреплена на стойке неподвижно.

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$$

Результат подтверждается, несмотря на то что припайки не учитывались.

Заменим в данной раме нижнюю припайку на шарнир (рис.1, б) и получим статически определимую систему, обладающую к тому же геометрической неизменяемостью:

$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$, или, с учетом двух условно подвижных звеньев, то есть шарнирно закрепленных:

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Наконец, та же рама, но установленная на двух шарнирных опорах (рис.1, в), дает лишнюю подвижность, предполагающую геометрическую изменяемость:

$$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 1,$$

С точки зрения структурной теории, система содержит три подвижных звена (две опоры и раму) и четыре шарнира.

$$S = 3n - 2p \quad = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Перейдем теперь к исследованию структуры более сложной, двуконтурной рамы (рис.2) содержащей 5 стержней, 4 припайки и 3 шарнира.

$W = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -3$, что означает три избыточные связи, то есть трижды неопределимую систему. Фактически система содержит только одно подвижно закрепленное звено - двухшарнирную опору, поэтому по формуле 1 получается аналогичный результат

$$S = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3.$$

Из приведенных примеров очевидно, что результаты, полученные по формулам (1) и (2), не отличаются. Это означает, что, если не учитывать параметр 3П в формуле (2), то результат расчета не изменится, что подтверждает актуальность формулы (1), близкой к формуле П.Л. Чебышева.

Концепция линейной теории структуры предполагает и более глубокий уровень исследования, а именно – поконтурный, когда структурные формулы применяются в каждом контуре отдельно [7]. Это позволяет уточнить распределение избыточных связей и лишних подвижностей по контурам. При этом в каждом последующем контуре не учитываются смежные параметры, то есть учтенные в предыдущем контуре. В теории механизмов первым принимается входной контур, то есть содержащий входную связь. В строительных системах входная связь не используется, поэтому можно начинать с любого контура, а при необходимости изменить последовательность контуров, чтобы добиться наилучшего варианта статической определимости системы. Например, для двухконтурной рамы на рис.2 сначала определим структурную характеристику левого контура, в котором три диска, три припайки и один шарнир, используя формулы (2) и (1).

$$W_1 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2.$$

$$S_1 = 3n - 2p = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

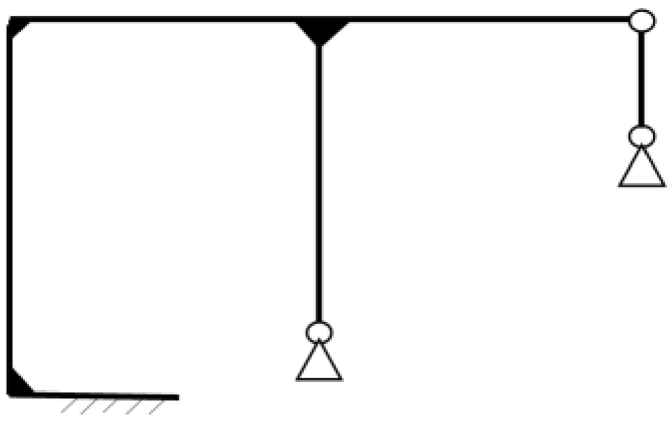


Рис. 2. – Двухконтурная рама

Получаем в этом контуре две избыточные связи. На второй контур осталось два диска, одна припайка и два шарнира:

$$W_2 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

$$S_2 = 3n - 2p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Ожидаемо в этом контуре одна избыточная связь (всего в системе их три).

Поконтурный анализ в обратном порядке (справа налево) дает следующие результаты:

$$W_1 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$W_2 = 3Д - 3П - 2Ш = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = -3$$

В целом избыточных связей осталось также три, но появилась возможность выбирать последовательность для дальнейшего расчета. Соответственно, и проверочный расчет по формуле (1) дает аналогичный результат, но только избыточные связи поменяли свое контурное базирование:

$$S_1 = 3 \cdot n - 2 \cdot p = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3.$$

$$S_2 = 3 \cdot n - 2 \cdot p = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Выбор последовательности поконтурного анализа определяет методику дальнейшего силового расчета.

Рассмотренных примеров достаточно, чтобы установить идентичность результатов по формулам (1) и (2), в том числе, если речь не идет о неподвижных соединениях, называемых припайками, поэтому в последующих примерах можно использовать формулу (1) для определения степени аномальности структуры, как и в структурном анализе механизмов, только упрощенную. В дальнейших расчетах будем использовать формулу (1), тем более, что последующие примеры не содержат припаек.

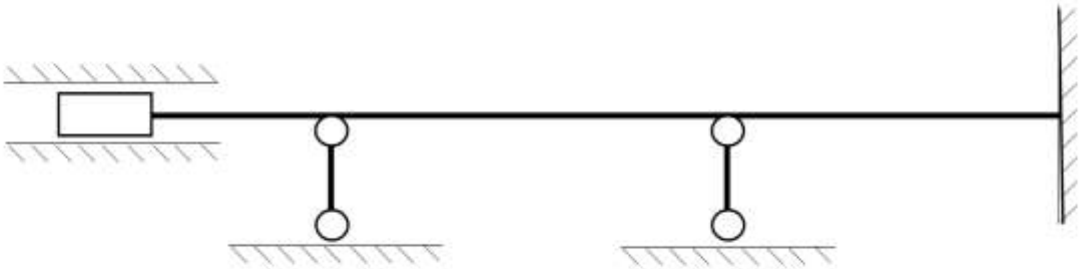


Рис. 3. – Статически неопределимая балка

Рассмотрим балку на двух опорных стержнях (рис.3) с одной жесткой заделкой и одной подвижной, которую можно приравнять к ползуну, который приравнивается к шарниру, поскольку обладает одной подвижностью. Степень аномальности $S = 3n - 2p = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4$.

Итак, приведенные примеры убеждают в справедливости применения формулы (1) для различных строительных систем при расчете степени статической неопределимости, а точнее, степени аномальности, то есть при структурном анализе, при выполнении которого не используются силовые и кинематические (размерные) параметры.

Сведения из монадной теории структуры. Проектирование стержневых систем предполагает процесс, обратный анализу, а именно структурный синтез, при котором характеристики задаются, а результатом становятся параметры схемы. Задачу эту можно решить, опираясь на базу знаний, основанную на *монадной теории структуры* [10]. Именно такой подход позволяет, с одной стороны, выразить структурную характеристику через количество стержней и треугольных контуров, что гораздо удобней применительно к фермам, и наоборот, определить количество стержней и треугольников строительной системы нормальной структуры.

Сущность монадной теории структуры состоит в том, что степень аномальности структуры не изменяется при определении как на уровне целых звеньев (дисков) n, так и на монадном уровне, то есть выраженная через количество стержней (монад) m. Например, степень аномальности на монадном уровне определяется по формуле (последующие формулы адаптированы к потребностям строительной механики и упрощены за счет принятия $S = 0$ и $p_0 = 0$):

$$S = 3m - 2p_m,$$

где m – число монад, то есть отдельных стержней;

p_m – количество простых шарниров, то есть однократных.

Поскольку структура фермы должна быть нормальной, приравниваем $S = 0$, откуда:

$$p_m = \frac{3m}{2}$$

Количество независимых контуров на уровне целых звеньев по формуле Х.И. Гохмана $c = p - n$, а на монадном уровне $c_m = p_m - m$.

Если выразить количество треугольников через количество контуров $\Delta = c_m - c = p_m - m - c$, то количество монад (стержней) можно подсчитать по формуле:

$$m = 2(c + \Delta). \qquad (3)$$

Количество простых шарниров, то есть кинематических пар на монадном уровне, определяется по формуле:

$$p_m = \frac{3m}{2} = \frac{3 \cdot 2(c+\Delta)}{2} = 3(c + \Delta) \qquad (4)$$

В этих формулах c – количество внешних контуров; Δ – количество внутренних контуров, в данном случае треугольников.

Теперь можно перейти к количеству звеньев (дисков) $n = 2c$ и к количеству кратных шарниров на схеме:

$$p = c_m + n = p_m - m + 2c \qquad (5)$$

Получена база знаний, позволяющая выразить степень статической неопределимости (степень аномальности) через количество внешних контуров c и количество треугольников Δ, что, с одной стороны, удобно, с другой – позволяет использовать полученные зависимости для синтеза статически определимых структур. Рассмотрим простые примеры. На рисунке 4,а показана статически определимая трехпролетная ферма. Она содержит один внешний контур $c = 1$ и количество треугольников $\Delta = 5$. Этих данных достаточно для структурного расчета.

Определяем количество стержней (монад) по формуле (3):

$$m = 2(c + \Delta) = 2(1 + 5) = 12.$$

а) б)

Рис. 4 – Трехпролетная ферма: а) статически определимая; б) статически неопределимая

Далее, количество простых (однократных) шарниров определим по формуле (4):

$$p_m = 3(c + \Delta) = 3(1 + 5) = 18.$$

Количество кратных шарниров на схеме по формуле (5):

$$p = p_m - m + 2c = 18 - 12 + 2 \cdot 1 = 8.$$

Очевидно, что полученные результаты совпадают с параметрами схемы.

Уточним, что данные формулы составлены с учетом условия статической и кинематической определимости $(S = 0)$, поэтому они не подходят для расчета неопределимых структур. Результат расчета показывает, какими должны быть параметры статически определимой неподвижной системы при ее синтезе.

В общем виде степень аномальности можно выразить через количество стержней (монад) $S = 3 \cdot m - 2p_m$. Применительно к схеме на рис. 4, а степень аномальности:

$$S = 3m - 2p_m = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 18 = 0,$$

а на рис. 4, б степень аномальности $S = 3 \cdot m - 2p_m = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 17 = -1$, что означает одну избыточную связь.

И еще один пример, на этот раз система (рис.5) имеет лишнюю подвижность $S = 1$, то есть изменяемая, и при расчете необходимо учитывать этот параметр. Входными параметрами также будем считать один внешний контур (от неподвижного шарнира до неподвижного) и четыре треугольника.

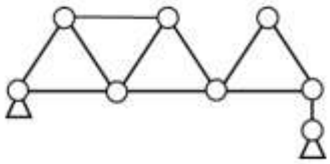


Рис. 5 – Система с лишней подвижностью

Определяем количество стержней (монад)

$$m = S + 2(c + \Delta) = 1 + 2(1 + 4) = 11.$$

Далее, количество простых (однократных) шарниров

$$p_m = S + 3(c + \Delta) = 1 + 3(1 + 4) = 16.$$

Количество дисков (звеньев) $n = S + 2 \cdot c = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Количество шарниров на схеме (кружочков)

$$p = p_m - m + 2c + S = 16 - 11 + 2 \cdot 1 + 1 = 8.$$

Литература

1. Чебышев П.Л. О параллелограммах // ПСС Т.4. Теория механизмов. -М.: Изд-во АН СССР, 1948. С.16-36.

2. Киселев В.А. Строительная механика. Учебник для вузов. Изд. 3-е, доп. М.: Стройиздат, 1976. 511 с.

3. Рабинович И.М. О структуре плоских систем // Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой и статикой плоских цепей. М.: Изд. МВТУ, 1928. 407 с.

4. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1980. 431 с.

5. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.

6. Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Учеб. для вузов. М.: Стройиздат, 1989. 255 с.

7. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971

8. Туменова И.М. Параметрическая оптимизация трапециевидной деревянной фермы с восходящими раскосами на металлических зубчатых пластинах // Инженерный вестник Дона, 2017, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/.

9. Личковаха А.С., Шемшура Б.А., Кузнецов С.А. Исследование напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатого стержня большой гибкости // Инженерный вестник Дона, 2018, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/.

10. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC. URL: doi.org/10.1051/matecconf/202134603041

References

Chebyshev P.L. O parallelogrammah. PSS T.4. Teorija mehanizmov. [On Parallelograms. PSS T.4. Theory of Mechanisms]. M.: Izd-vo AN SSSR, 1948. pp.16-36.

1. Kiselev V.A. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. Izd. 3-e, dop. M.: Strojizdat, 1976. 511 p.
2. Rabinovich I.M. Kinematicheskij metod v stroitel'noj mehanike, gl.III. M.: Izd. Moskovskogo vysshego tehnicheskogo uchilishha, 1928. 407 p.
3. Snitko N.K. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1980. 431 p.
4. Rzhanicyn A.R. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1982. 400 p.
5. Chiras A.A. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Strojizdat, 1989. 255 p.
6. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: iopscience.iop,org/volume/1757-899X/971
7. Tumenova I.M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2017, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2017/4165/.
8. Lichkovaha A.S., Shemshura B.A., Kuznecov S.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2018/4773/.
9. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC. URL: doi.org/10.1051/matecconf/202134603041

Дата поступления: 30.08.2024

Дата публикации: 01.10.2024