Модельные распределения математической статистики в гранулометрическом анализе

Н.Н. Азимова, М.В. Бедоидзе, Д.А. Богданец, Д.А. Джедиров, Д.В. Русляков

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

Аннотация: Проанализированы и систематизированы модельные многопараметрические распределения, используемые в науке и технике. Особое внимание уделено распределениям Розина – Раммлера – Вейбулла – Гнеденко и Колмогорова – Гаусса, адекватно описывающим одно- и многократное дробление. Пригодность этих распределений для моделирования гранулометрического состава производственных отходов механообработки подтверждена физическим и компьютерным экспериментами.
Ключевые слова: функция распределения, математическая модель, обобщенные гиперболические распределения, дробление, сыпучая среда, механическая обработка.

В технических приложениях широко используются различные функции распределения или в дифференциальной форме $\mathrm{p}(x)$. Наряду с независимой переменной математические модели названных связей содержат набор параметров, характеризующих форму и масштаб. Чем больше параметров содержит модельное распределение, тем проще адаптировать его к реальности [1]. Практически для описания любой статистики в науке и технике достаточны пятипараметрические обобщённые гиперболические распределения [2,3]:

$$\mathrm{p}_{GH}(x;\alpha,\beta,\nu,\mu,\lambda)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}}\varphi\left(\frac{x-\beta-\alpha z}{\sqrt{z}}\right)\mathrm{p}_{GIG}(z;\nu,\mu,\lambda)dz=$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\exp\left(-\frac{(x-\beta-\alpha z)^2}{2z}\right)\frac{\lambda^{\nu/2}z^{\nu-1}}{2\mu^{\nu/2}K_\nu(\sqrt{\mu\lambda})}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{z}+\lambda z\right)\right]dz=$$

$$=\frac{\lambda^{\nu/2}(\lambda+\alpha^2)^{\nu/2-1/4}}{2\sqrt{2\pi}\mu^{\nu/2}K_\nu(\sqrt{\mu\lambda})}\left(\mu+(x-\beta)^2\right)^{1/4-\nu/2}\cdot\exp\{\alpha(x-\beta)\}\times$$

$$\times K_{\nu-1/2}\left(\sqrt{(\mu+(x-\beta)^2)(\lambda+\alpha^2)}\right). \qquad (1)$$

Распределение (1) получено совмещением нормальной функции распределения $\Phi\left(\frac{x-\beta-\alpha z}{\sqrt{z}}\right)$ и обобщённой обратной гауссовской:

$$p_{GIG}(x;\nu,\mu,\lambda)=\frac{\lambda^{\nu/2}}{2\mu^{\nu/2}K_\nu(\sqrt{\mu\lambda})}x^{\nu-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{x}+\lambda x\right)\right\},\ x>0 \qquad (2)$$

по схеме [1]:

$$p_{GH}(x;\alpha,\beta,\nu,\mu,\lambda)=\int_0^\infty \Phi\left(\frac{x-\beta-\alpha z}{\sqrt{z}}\right)p_{GIG}(z;\nu,\mu,\lambda)dz\ ,$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(z)dz,\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},\qquad x\in\mathrm{R} \qquad (3)$$

где $\nu\in R,\mu>0,\lambda\geq 0$, если $\nu<0;\mu>0,\lambda\geq 0$, если $\nu=0$; и $\mu>0,\lambda\geq 0$, если $\nu>0$; α и β – параметры сдвига.

В формуле (3) распределения совмещены по одному (комбинированному) параметру, т.к. числовые характеристики сдвига и масштаба жёстко взаимосвязаны [1].

Пять параметров в обобщённых гиперболических распределениях позволяют редуцировать их в различные частные случаи [1].

Трёхпараметрические обобщённые гамма-распределения [4] удобны для технических приложений. Соответствующая дифференциальная функция распределения выражается формулой:

$$f(x,\nu,k,\delta)=\begin{cases}\dfrac{|\nu|}{\delta\Gamma(k)}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{k\nu-1}\exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\nu}\right\}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \qquad (4)$$

В формуле (4) параметр ν отвечает за степень, $k>0$ – за форму и $\delta>0$ – за масштаб распределения, а $\Gamma(k)$ – гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx. \qquad (5)$$

Выводимые из общего трёхпараметрического распределения (4)-(5) наиболее употребительные в науке и технике варианты отображены на атлас-схеме рис.1, а соответствующие им формулы для дифференциальной функции распределения – в табл. 1 – 2.

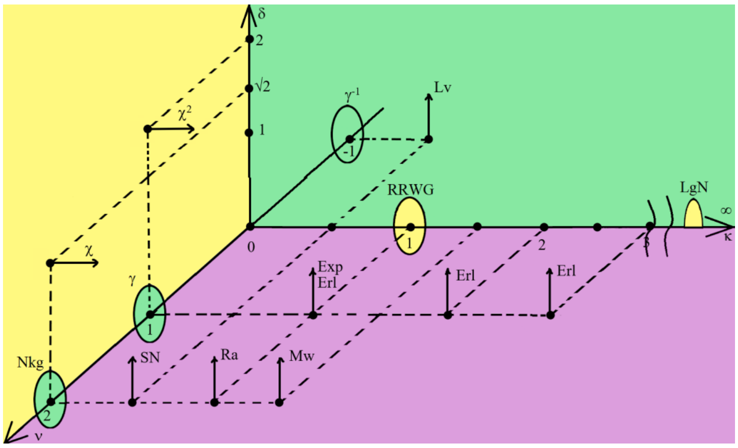

Рис. 1. – Карта трехпараметрических обобщенных гамма-распределений, получивших широкое распространение в научных исследованиях, экономике и статистическом анализе

Таблица №1

Гамма-распределение и его частные случаи

Вариант	Обозначение	Параметры	Выражение $f(x;k,\theta)$
Экспоненциальное	**Exp**	κ = 1	$\theta e^{-\theta x},\ x \geq 0,\ \theta > 0$
Эрланга	**Erl**	κ∈ N	$\frac{1}{\Gamma(k)} \theta^k x^{k-1} e^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$
Хи-квадрат	**χ²**	δ = 2	$\frac{1}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-x/2},\ x \geq 0,\ n \in N$

Таблица №2

Распределение Накагами и его частные случаи

Вариант	Обозначение	Параметры	Выражение $f(x;k,\theta)$
Полунормальное	**SN**	κ = 1/2	$\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\delta^2}\right\},\ x \geq 0,\ \delta > 0$

Рэлея	**Ra**	κ = 1	$\frac{x}{\delta^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\delta^2}\right\},\ x\geq 0,\ \delta>0$
Хи-распределение	**χ**	δ = $\sqrt{2}$	$\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}x^{n-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, x\geq 0,$ $n\in N$
Максвелла	**Mw**	κ = 3/2	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\delta^3}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\delta^2}\right\}, x\geq 0,\ \delta>0$

Наряду с приведёнными в табл. 1 - 2 моделями широко используются распределения Розина – Раммлера – Вейбулла – Гнеденко (κ = 1, обозначение на схеме рис. 1 - **RRWG**):

$$f(x;\eta,\mu)=\frac{\eta x^{\eta-1}}{\mu^{\eta}}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\eta}\right\}, x\geq 0, \eta>0, \mu>0, \tag{6}$$

обратное гамма-распределение ($\nu = -1$, обозначение γ^{-1}):

$$f(x;\mu,\lambda)=\frac{1}{\mu\lambda\Gamma(\lambda)}\left(\frac{\mu\lambda}{x}\right)^{\lambda+1}\exp\left\{-\frac{\mu\lambda}{x}\right\}, x\geq 0, \lambda>0, \mu>0, \tag{7}$$

обычно в виде распределения Леви ($\nu = -1$, κ = 1/2, обозначение **Lv**):

$$f(x;\mu)=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\frac{1}{x^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\mu}{2x}\right\}, x\geq 0, \mu>0, \tag{8}$$

а также логнормальное распределение (κ $\to\infty$,обозначение **LgN**) [5]:

$$f(x;\mu,\delta)=\frac{1}{\delta x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\delta^2}\right\}, x\geq 0, \mu\in R, \delta>0. \tag{9}$$

Экспериментальные исследования сыпучих сред, полученных различным способом, свидетельствуют что при однократном дроблении размеры фрагментов (частиц) описываются моделью Розина – Раммлера – Вейбулла – Гнеденко (6) или ее частным вариантом – экспоненциальным распределением [6, 7]. При множественном однородном случайном дроблении распределение осколков по размеру – логнормально, т.е. подчиняется закону Колмогорова – Гаусса [5-7]:

$$p(x)=\frac{e^{-\left(\frac{\lg x-\lg\alpha}{\sqrt{2}\lg\sigma}\right)^2}}{\int\limits_{\varepsilon\to 0+0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\lg x-\lg\alpha}{\sqrt{2}\lg\sigma}\right)^2}dx} \qquad (10)$$

Соотношения (6) и (10) авторы подвергли экспериментальной проверке: хрупкая стержневая конструкция (макаронина спагетти) подвергалась однократному (ударному воздействию со стороны ограничивающих плоскостей) и многократному (толчению в ступе) случайному измельчению. Параллельно выполнялся имитационный компьютерный эксперимент. Обе формы экспериментальной проверки соответствия моделей (6) и (10) реальности подтверждают их справедливость. Результат тестирования (6) путем компьютерной имитации приведен в табл. 3.

Таблица №3

Результат математической обработки статистики длин фрагментов макаронины (соломка) при однократном случайном дроблении

Опыт	1	2	3	4	5	Теория
Среднее	0,1	0,0133	0,125	0,111	0,125	1/число кусков
СКО	0,203	0,0196	0,269	0,225	0,231	1/число кусков
Асимметрия	2,548	2,619	2,779	2,923	2,701	2
Эксцесс	9,556	10,46	10,789	11,653	10,453	9

В качестве примера насколько соответствует модель RRWG геометрической статистике реальной технологической пыли приведем некоторые микрофотографии (рис. 2) и соответствующие результаты размерного анализа (табл. 4). Для получения числовых характеристик модельного распределения RRWG для объектов табл. 4 использовалась оригинальная система автоматизации оптических измерений [8], а также методика статистического анализа [9], базирующаяся на классических алгоритмах математического программирования [10].

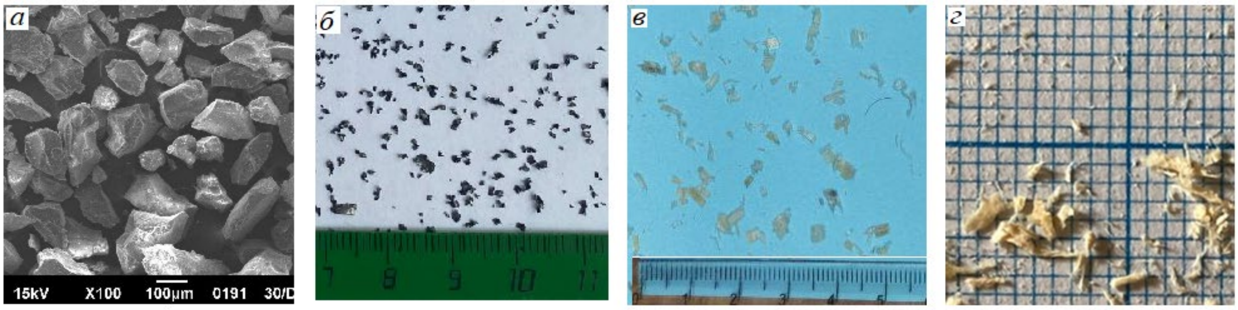

Рис. 2. – Геометрия технологической пыли, образующейся в различных процессах механической обработки заготовок: *а* – стали путем резания абразивным кругом; *б* – серого чугуна при фрезеровании; *в* – сосны при сверлении и *г* – ели при распиле цепной пилой

Таблица №4

Результаты параметрической идентификации модели RRWG по данным механической обработки различных материалов

№	Материал	Способ обработки	Параметры модели		Погрешность модели	
			D, мкм	*n*	СКО, отн. ед.	Коэффициент корреляции
1 - *а*	Сталь рельсовая К63	Резание абразивным кругом	47	1,44	0,39	0,934
2 - *б*	Серый чугун СЧ20	Фрезерование	136	0,689	0,37	0,913
3 - *в*	Сосна	Сверление	164	1	0,34	0,956

4 - *г*	Ель	Распил цепной пилой	671	1,32	0,43	0,89

Как следует из данных табл. 4, модель RRWG удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, полученными для различных материалов и способов механической обработки. Предлагаемое здесь формульное представление результата в рамках RRWG-статистики удобно для применения в инженерных расчетах и CAD-системах при проектировании систем пылеудаления и аспирации.

Основные результаты работы сводятся к следующему. Анализ модельных распределений, используемых в статистике научно-технических объектов, позволил сконструировать их иерархию (атлас-схему). Поскольку особо приоритетными в гранулометрии являются распределения Розина – Раммлера – Вейбулла – Гнеденко и Колмогорова – Гаусса, проведены специальные физический и компьютерный эксперименты, показавшие их высокую реалистичность. Результаты выполненного исследования подтверждают справедливость использования данных модельных распределений в дисперсном анализе технологической пыли, выполняемом авторским коллективом.

Литература

1. Закс Л.М., Королев В.Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // Информатика и её применения. 2013. Т. 7, выпуск 1. С. 105-115.

2. Barndorff-Nielsen O. E. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // Proc. R. Soc. L. Ser. A, 1977. Vol. A(353). pp. 401–419.

3. Barndorff-Nielsen O. E. Hyperbolic distributions and distributions of hyperbolae // Scand. J. Statist., 1978. Vol. 5. pp. 151–157.

4. Stacy E.W. A generalization of the gamma distribution // AnnalsMath. Statistics, 1962. Vol. 33. pp. 1187–1192.

5. Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // Доклады АН СССР. 1941. Т. 31. С. 99-101.

6. Адушкин В.В., Попель С.И., Шишаева С.И. Анализ мелкодисперсной фракции при разрушении горных пород взрывом и образовании скальных оползней// Записки горного института. 2007. т.171. с. 32-38.

7. Азимова Н.Н. Снижение концентрации пыли и уровней шума в рабочей зоне при абразивной резке / Дисс. Канд. Тех. наук. Ростов-на-Дону, 2020. 165 с.

8. Сулименко А.С., Бедоидзе М.В., Грызлов В.Д. и др. Автоматизированный анализ размерных характеристик полидисперсных сред по микрофотографиям // Навигатор в мире науки и образования. 2024. № 01(62). с. 252-264.

9. Азимова Н.Н., Бедоидзе М.В., Богданец Д.А., Джедиров Д.А., Кругликова М.А. Теоретические основы и экспериментальные методы гранулометрического анализа технологической пыли // Автоматизированное проектирование в машиностроении. 2024. № 17. с. 48-53.

10. О. В. Васильев, А. В. Аргучинцев. Методы оптимизации в задачах и упражнениях // Москва. Физматлит. 1999. 207 с. ISBN 5-9221-0006-8.

References

1. Zaks L.M., Korolev V.Ju. Informatika i ejo primenenija. 2013. T. 7, vypusk 1. pp. 105-115.

2. Barndorff-Nielsen O. E. Proc. R. Soc. L. Ser. A, 1977. Vol. A(353). pp. 401–419.

3. Barndorff-Nielsen O. E. Scand. J. Statist., 1978. Vol. 5. pp. 151–157.

4. Stacy E.W. AnnalsMath. Statistics, 1962. Vol. 33. pp. 1187–1192.

5. Kolmogorov A.N. Doklady AN SSSR. 1941. T. 31. pp. 99-101.

6. Adushkin V.V., Popel' S.I., Shishaeva S.I. Zapiski gornogo instituta. 2007. t.171. pp. 32-38.

7. Azimova N.N. Snizhenie koncentracii pyli i urovnej shuma v rabochej zone pri abrazivnoj rezke [The dust concentration and the noise level reelection within the labor zone are by abrasive cutting]. Diss. Kand. Teh. nauk. Rostovn/D., 2020. 165 p.

8. Sulimenko A.S., Bedoidze M.V., Gryzlov V.D. i dr. Navigator v mire nauki i obrazovanija. 2024. № 01(62). pp. 252-264.

9. Azimova N.N., Bedoidze M.V., Bogdanec D.A., Dzhedirov D.A., Kruglikova M.A. Avtomatizirovannoe proektirovanie v mashinostroenii. 2024. № 17. pp. 48-53.

10. O. V. Vasil'ev, A. V. Arguchincev. Metody optimizacii v zadachah i uprazhnenijah [Optimization methods in problems and exercises]. Moskva. Fizmatlit. 1999. 207 P.

Дата поступления: 14.11.2024

Дата публикации: 1.01.2025