Об одном методе решения задач реологии в лессовых просадочных грунтах

И.Ю.Дежина

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Рассматривается методика расчета напряженно-деформированного состояния оснований лессовых просадочных грунтов под действием длительнодействующих уплотняющих нагрузок при их неполном водонасыщении как упруговязкопластических сред. В основе определяющих уравнений - теория течения наследственного типа с учетом объемного, сдвигового пластического деформирования, явления дилатансии, различных значениях ядер ползучести формообразования и всестороннего сжатия. Грунт - изотропная среда. Приращение напряжений складываются из вязкоупругой и вязкопластичной составляющих. Алгоритм решения выполнен с использованием итерационных методов и метода конечных элементов и включает в себя решения линейно-упругой, упругопластической и упруговязкопластической задач в определенной последовательности. Физико-механические параметры, зависимости напряжений и деформаций от времени при различных значениях влажности и уплотняющих давлениях заданных грунтов определяются в лабораторных условиях.
Ключевые слова: лессовые просадочные грунты, ползучесть, упруговязкопластическая среда, методика расчета, теория пластичности наследственного типа, реологические модели, методика расчета, метод конечных элементов, итерационный процесс, испытания грунтов

Значительная часть территории южной России, Украины, Средней Азии занята лессовыми просадочными грунтами. Эти грунты отличаются высоким содержанием пылеватых частиц, изменением плотности скелета в пределах ρ_d=1,3-1,6 г/см2 , пористостью до 50% и более, колебаниями влажности от 3-4 (в засушливых районах) до 15-20 процентов, имеют характерные минералогический состав и структуру.

Замачивание лессовых грунтов под действием собственного веса или дополнительной нагрузки от сооружения может привести к возникновению значительных неравномерных деформаций – просадок. Величина относительной просадочности при этом может колебаться в пределах ε_{sl}=0,01-0,16.

При строительстве зданий и сооружений на просадочных грунтах предусматривают различные, достаточно дорогостоящие противопросадочные мероприятия.

Наибольшие затруднения возникают при проектировании зданий и сооружений на лессовых просадочных грунтах II типа по просадочности. Даже использование свайных фундаментов, прорезающих всю просадочную толщу и заглубленных в непросадочные грунты, еще не гарантируют надежной работы основания. За счет разной скорости просадки окружающего грунта и сваи по ее боковой поверхности могут развиваться силы негативного трения по величине сопоставимые с несущей способностью сваи по материалу.

На вновь осваиваемых территориях приходится проводить сложные и длительные по времени полевые натурные испытания с замачиванием котлованов, испытанием свай статической нагрузкой, определением сил негативного трения и т.д.

Сокращения объема полевых испытаний можно добиться за счет использования при проектировании более достоверных математических моделей основания, повышения полноты исследований в лабораторных условиях. Это будет способствовать снижению стоимости, сроков строительства, повышению надежности эксплуатации возводимых зданий и сооружений.

Исследования показывают, что зависимость между напряжениями и деформациями при испытании просадочных грунтов носит явно нелинейный характер. Согласно литературных данных [1,2] пластические деформации являются преобладающими и могут составлять до 80-90% всей деформации. Средняя величина ползучести для лессовидных суглинков по результатам компрессионных испытаний образцов грунта при давлении 0,1-0,3 МПа для грунтов различного литологического типа составляет до 30%. В тоже время основным методом расчета оснований на лессовых просадочных грунтах остается расчет по деформациям с использованием теории линейно-деформированной среды. Получающиеся при этом значительные расхождения теории и практики корректируются за счет различных эмпирических коэффициентов, изменяющих результаты расчета иногда в несколько раз.

Автором ведутся исследования по определению напряженно-деформированного состояния лесовых просадочных оснований при неполном водонасыщении с учетом объемного, сдвигового пластического деформирования, а также ползучести скелета и разработана методика расчета НДС оснований для лессовых просадочных грунтов как упруговязкопластических сред [3,4]. Физико-механические параметры предложенной механико-математической модели стандартны и могут быть получены в полевых или лабораторных условиях. На основе МКЭ и шагового метода разработан алгоритм расчета и программное обеспечение в составе программного комплекса “DEFOR2” [5].

Теоретические решения доведены до практической реализации.

1.Определяющее уравнение теории пластичности наследственного типа

Эксперименты показывают, что пластические деформации нелинейно зависят от напряжений, пути нагружения и вида напряженного состояния. Для связных глинистых грунтов характерно запаздывание пластических деформаций во времени. Экспериментальное изучение длительной прочности глинистых грунтов в условиях трехосного сжатия по указанной траектории доказывает, что прочность зависит от величины и времени действия нагрузки.

Согласно лабораторным и натурным наблюдениям зависимости относительной просадки от времени $\varepsilon_{sl}=f(t)$ и $\varepsilon_{sl}=f(\sigma)$ носят явно нелинейный характер. Особенностью кривых ползучести является наличие двух участков. Первый участок – неустановившаяся ползучесть, деформации затухают во времени, что объясняется структурно-необратимыми связями и имеют пластическую природу. Второй участок – медленно затухающее пластично-вязкое течение, скорость затухания постоянна. Продолжительность каждого участка зависит от свойств грунта, влажности и действующей нагрузки.

Интересно, что все кривые просадки от времени подобны, т.е. могут быть получены из одной кривой путем умножения ее ординаты на некоторую величину, зависящую от нагрузки.

Т.о. развитие теории вязкоупругости и теории упругости наследственного типа, сдвиговой теории упруговязкопластичности (или теории пластичности наследственного типа) является актуальной задачей определения НДС совместно с явлениями влагопереноса в лессовых просадочных грунтах.

Компонены НДС при постоянной нагрузке с течением времени изменяются. Под ползучестью будем подразумевать непрерывный рост деформаций во времени при постоянных напряжениях. Релаксацией напряжений будем считать уменьшение напряжений во времени при постоянных деформациях. Классическая зависимость деформации образца от времени под действием постоянной нагрузки включает три стадии. На первой стадии скорость деформации постепенно убывает, на второй – постоянна. На третьей - скорость деформации возрастает до разрушения образца. При этом различают предел ползучести (максимальная допускаемая деформация) и предел длительной прочности (напряжение разрушения).

Наследственная теория упругости – модель, для которой при внезапно приложенной нагрузке возникают мгновенные деформации и с возрастанием времени появляются деформации течения, зависящие от истории нагружения.

Используем представление нелинейного функционала в виде ряда кратных интегралов.

$$\varepsilon = \int_0^t I_1(t-\theta_1)d\sigma(\theta_1) + \int_0^t\int_0^t I_2(t-\theta_1, t-\theta_2)d\sigma(\theta_1)\, d\sigma(\theta_2) + \ldots, \tag{1}$$

Где ядро I_k представляется в виде одинаковых функций от **k** различных аргументов.

Обозначим наследственное напряжение

$$\tilde{\sigma} = \int_0^t I(t-\tau)d\sigma(\tau) = (1+L^*)\sigma \ , \tag{2}$$

Где L – ядро ползучести. Зависимость (1) преобразовывается в вид

$$\varepsilon = a_1\tilde{\sigma} + a_2\tilde{\sigma}^2 + a_3\tilde{\sigma}^3 + \ldots$$

Обращение (2) приводит к виду

$$\tilde{\sigma} = (1+L^*)\sigma = \varphi(\varepsilon) \quad , \tag{3}$$

Уравнение (3) - основной закон одномерной нелинейной теории наследственности [4]. Здесь $\varphi(\varepsilon)$ – функция, определяющая мгновенную диаграмму деформирования.

Для расчета обводняемых лессовых оснований может быть использована теория пластичности наследственного типа. Получены определяющие уравнения в прямой и обратной формах.

Для приближенных решений сформулированной краевой задачи использован метод линеаризации, представление потенциальной энергии в виде ряда Тейлора, обобщенный постулат Druckera [6].

2. Реологические модели упруговязкопластических сред

В основе определяющих уравнений - теория течения наследственного типа с учетом объемного, сдвигового пластического деформирования, явления дилатансии, при условии различных значений ядер ползучести формообразования и всестороннего сжатия. Грунт представим в виде изотропной среды, приращение вязкоупругой и вязкопластической составляющих напряжений просуммируем.

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^{e} - d\sigma_{ij}^{g}, \qquad d\sigma_{ij}^{e} = \delta_{ij}\, d\sigma_{0}^{e} + ds_{ij}^{e}$$

Где $d\sigma_{ij}^{e}$ – приращение напряжений, которое дополняет истинное приращение $d\sigma_{ij}$ до величины приращения напряжений $d\sigma_{ij}^{e}$ линейно-упругой задачи.

Обозначим по тексту знаком ~ наследственные средние объемные деформации и напряжения, знаком ^ - наследственные напряжения и деформации формоизменения.

Предполагается, что объемное дополнительное напряжение и параметр упрочнения являются функциями наследственных инвариантов средней деформации и интенсивности деформации.

Определяющее уравнение, учитывающее реологические свойства грунта в приращениях напряжений

$$d\sigma_{ij} = 3K_0\delta_{ij}\, d\tilde{\varepsilon}_0 + 2G_0\, d\hat{e}_{ij} - \left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_1 + \frac{2\hat{e}_{ij}}{3\hat{\varepsilon}_i}\beta'_2\right) d\varepsilon_0 -$$

$$\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\beta''_2 + \frac{2\hat{e}_{ij}}{3\hat{\varepsilon}_i}\beta_3\right) d\hat{\varepsilon}_i$$

$$\beta_1 = 9\left(K_0 - \tilde{K}_k\right), \quad \beta_3 = 3\left(G_0 - \hat{G}_k\right), \quad \beta'_2 = -\hat{g}_1, \quad \beta''_2 = -\tilde{g}_2$$

При наличии аппроксимации экспериментальных данных в виде функции $\sigma_0 = \sigma_0\left(\tilde{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_i\right)$ *и* $\sigma_i = \left(\tilde{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_i\right)$ коэффициенты β_k могут быть представлены через физические характеристики среды

$$\tilde{K}_k = \frac{\partial\sigma_0}{3\partial\tilde{\varepsilon}_0}, \qquad \hat{G}_k = \frac{\partial\sigma_i}{3\partial\hat{\varepsilon}_i}, \qquad \hat{g}_1 = 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\hat{\varepsilon}_i}, \qquad \tilde{g}_2 = \frac{\partial\sigma_i}{3\partial\tilde{\varepsilon}_0}$$

Где K_0, G_0 – начальные модули объемной и сдвиговой деформации, $\tilde{K}_k$, $\hat{G}_k$-наследственные касательные модули объемной и сдвиговой деформации; $\hat{g}_1, \tilde{g}_2$ - наследственные модули дилатансии; $d\varepsilon_{km}(d\sigma_{ij})$- приращение тензора деформаций(напяжений); ε_i - интенсивность деформаций; e_{ij} -компоненты девиатора деформаций; δ_{ij} -дельта Кронекера.

Уравнения в приращениях для пластически сжимаемых дилатирующих сред наследственного типа представим в виде

$$d\sigma_{ij,j} + dp_i = 0\ , \qquad \in V,$$

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(du_{i,j} + du_{j,i}\right), \qquad \in \quad V, S,$$

$$d\sigma_{ij} = \tilde{H}_{ijkm}\, d\tilde{\varepsilon}_{km} + \hat{H}_{ijkm}\, d\hat{\varepsilon}_{km}, \qquad \in V, S,$$

$$d\sigma_{ij} n_j - dg_{is} = 0\ , \qquad \in S_1$$

$$du_i - du_{is} = 0\ , \qquad S_2,$$

Уравнения связи между наследственными и истинными деформациями и экспериментальные зависимости среды

$$d\tilde{\varepsilon}_{ij} = d\left[\left(1 - R_1^*\right)\varepsilon_{ij}\right], \qquad d\hat{\varepsilon}_{ij} = d\left[\left(1 - R_2^*\right)\varepsilon_{ij}\right],$$

$$\sigma_i = \sigma_i\left(\tilde{\varepsilon}_0; \hat{\varepsilon}_i\right), \qquad \sigma_0 = \sigma_0\left(\tilde{\varepsilon}_0; \hat{\varepsilon}_i\right)$$

Где R_1, R_2 –ядра релаксации.

Определяющее уравнение в матричном виде:

$$\Delta\sigma^T = H_1 \cdot \Delta\hat{\varepsilon}\ , \qquad (4)$$

Где

$$H_1 = D_0 + 3\left(\tilde{K}_k - K_0\right) \cdot D_1 + \frac{2\hat{g}_1}{9\varepsilon_i} \cdot D'_2 + \frac{2\tilde{g}_2}{9\varepsilon_i} D''_2 + \frac{4\left(\hat{G}_k - G_0\right)}{3\hat{\varepsilon}_i^2} \cdot D_3$$

$$\tilde{K}_k = \frac{\partial\sigma_0}{3\partial\tilde{\varepsilon}_0}, \quad \hat{G}_k = \frac{\partial\sigma_i}{3\partial\hat{\varepsilon}_i}, \quad \hat{g}_1 = \frac{3\partial\sigma_0}{\partial\hat{\varepsilon}_i}, \quad \tilde{g}_2 = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\tilde{\varepsilon}_0}$$

При решении задач шаговым методом уравнение (4) линеаризуется.

3. Конечноэлементные алгоритмы решения задач упруговязкопластичности

Применяем итерационные методы и МКЭ. На произвольном конечном элементе вектор-функция модифицированных перемещений

$$\hat{u} = \varphi^T \hat{q}, \qquad \in V_{эл}, \tag{5}$$

Где φ^T – матрица координатных функций, q – вектор узловых модифицированных перемещений.

Модифицированные деформации

$$\hat{\varepsilon} = A \cdot \varphi^T \cdot \hat{q} = \Phi \cdot \hat{q}, \tag{6}$$

После подстановки (5) – (6) в вариационное уравнение Лагранжа имеем

$$\delta\Pi_1 = \int_V \delta\varepsilon^T \cdot \sigma dV - \int_V \delta u^T \rho dV - \int_{S_1} \delta u^T g_S dS,$$

$$\delta\hat{q}^T \left[\int_V \Phi^T \left(\sigma^n + H_1 \cdot \Phi\Delta\hat{q}^n\right) dV - \int_V \varphi\rho dV - \int_S \varphi\rho_S dS\right] = 0, \tag{7}$$

Из (7) следует

$$\hat{k}_k^n \cdot \Delta\hat{q}_n^{n+1} = \rho^{n+1} - r^n, \tag{8}$$

Где наследственная касательная матрица жесткости

$$\hat{k}_k = \int_V \Phi^T \hat{H}^n \Phi \, dV,$$

вектор узловых сил

$$\rho = \int_V \varphi\rho\ dV + \int_S \varphi\ g_S dS$$

вектор узловых сил, обусловленных начальным напряжением

$$r^n = \int_V \Phi_n^T \sigma^n dV ,$$

Для системы конечных элементов уравнения имеют вид

$$\hat{K}_k^n \cdot \Delta\hat{q}_n^{n+1} = P^{n+1} - R^n,$$

Где K_k^n, P, R – общие матрицы жесткости системы конечных элементов.

При организации итерационного процесса при использовании шагового метода зависимость σ_i-ε_i представляется в виде изохронных кривых. Временной интервал $t=m\cdot\Delta t$. Начальные модули объемной, сдвиговой деформации и модули дилатансии принимаются равные конечным модулям предыдущего шага. Внутри временного интервала Δt расчет ведется на полную нагрузку P и g_s или интервал ΔP и Δg_s .

Основное соотношение (8) представим в виде

$$k_0 q_0 + k_k^{m-1} \cdot \left(1 - R^*\right) \cdot \Delta q^m = \Delta p^m, \qquad \in V_{эл}$$

Интеграл $R^* \cdot \Delta q^m$ в соответствии с методом квадратурных формул(формулы трапеции):

$$R^* \Delta q^m = \int_0^t R(t,\theta)\ \Delta q(\theta)\ d\theta\ = R\ (m\Delta t\ )\Delta q^0 \frac{\Delta t}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} R\left[(m-n)\Delta t\ \right] \cdot$$

$$\Delta q^n \Delta t + R(0)\Delta q^m \frac{\Delta t}{2} ,$$

Тогда вязкопластическая составляющая

$$\hat{k}_k^{m-1} \Delta q^m \left[1 - R(0)\ \frac{\Delta t}{2}\ \right] = \Delta p^m + \frac{\Delta t}{2} R\ (m\Delta t\ )\hat{k}_k^{m-1}\ \Delta q^0\ +$$

$$\Delta t\ \hat{k}_k^{m-1} \sum_{n=1}^{m-1} R\left[(m-n)\Delta t\ \right] \cdot \Delta q^n$$

Окончательно для конечного элемента

$$\hat{k}_k^{m-1}\Delta q^m=\Delta p^m+\hat{k}_k^{m-1,n}\Delta q^1+\sum_{n=1}^{m-1}\hat{k}_k^{m-1,m-n}\cdot\Delta q^n$$

Алгоритм решения следующий:

1.Вычисляется условно-мгновенные компоненты НДС для начального момента *t=0.* Решается линейно-упругая задача.

$$K_0^0\Delta q'^0=\Delta P'^0$$

Где начальная матрица жесткости

$$K_0^0=\int_V \Phi^T D_0^0\Phi dV$$

Определяются начальные деформации и напряжения

$$\varepsilon^0=\Phi\ q^0,\qquad \sigma^0=D_0^0\varepsilon_1^0$$

2.Решается упругопластическая задача

$$K_k^n\ \Delta q'^n=\Delta P'^n$$

3.Организуется итерационный процесс упруговязкопластической задачи при $\Delta P=0$.

$$\hat{k}_k^{m-1,0}\Delta q^m=\Delta p^m+\hat{k}_k^{m-1,n}\Delta q^1+\sum_{n=1}^{m-1}\hat{k}_k^{m-1,m-n}\cdot\Delta q^n,\tag{9}$$

После решения системы уравнений с использованием (9) относительно Δq^m определяем

$$q^m=q^{m-1}+\Delta q^m$$

Значения модифицированных перемещений и деформаций организуем с использованием формул

$$\hat{q}^m=\left(1-R_m^*\right)q^m,\qquad \hat{\varepsilon}^m=\left(1-R_m^*\right)\varepsilon^m$$

Аналогично определяются модифицированные средняя деформация, интенсивность деформаций, модули объемной и сдвиговой деформации, модуль дилатансии, компоненты девиатора деформаций. Другой способ использования выражения *(1-R*)* - определение методом выравнивания кривых из экспериментальных данных.

Расчет повторяют до тех пор, пока $t \le m\Delta t$. Число итераций **m** назначают таким образом, чтобы достигнуть стабилизации решения.

Для использования методики в практических целях необходимо проводить серию экспериментов в лабораторных условиях на компрессионных, сдвиговых, стабилометрических приборах. Определение объемных и сдвиговых модулей деформации с учетом фактора времени сводится к получению математической зависимости деформаций от времени и определению вида и параметров ядер ползучести и реалаксации при различных значениях влажности и уплотняющих давлениях [7,8]. Использование достоверных математических моделей основания с учетом деформаций ползучести при проектировании на лессовых просадочных грунтах в условиях неполного водонасыщения способствует повышению надежности эксплуатации возводимых строительных объектов [9,10,11,12].

Выводы

1.При проектировании на лессовых просадочных грунтах следует учитывать нелинейность между напряжениями и деформациями. Доля деформаций ползучести может быть значительна.

2.Для грунтов, имеющих типичные взаимоподобные кривые ползучести, полученные при испытании, например, в компрессионных приборах при постоянных влажностях и уплотняющих давлениях, для численного моделирования НДС применяется модель упруговязкопластической среды. При этом используется определяющее уравнение в приращениях напряжений на основе упругопластической среды.

3.Алгоритм решения упруговязкопластических задач построен на использовании итерационных процессов. Вначале определяются условные мгновенные компоненты НДС для начального временного интервала. При появлении пластических деформаций решается упруго вязкопластическая задача.

4.Определение параметров предлагаемой методики требует испытания образцов в грунта в лабораторных условиях на сдвиговых, компрессионных, стабилометрических приборах.

Литература

1. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. 1978 изд. М.: Высш.школа, 1978. 447 с.

2. Зарецкий Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений. М.: Стройиздат, 1988. 352 с.

3. Васильков Г.В., Дежина И.Ю., Орта-Ранхель А. О реологических моделях упруговязкопластических сред // Изв.вузов Сев-Кавк.регион. Естественные науки. 1998. №3. С. 21-36.

4. Васильков Г.В., Дежина И.Ю., Орта Ранхель. Механико-математическая модель пористой упруговязкопластической среды при неполном влагонасыщении // Труды VII школы-семинара “Современные проблемы механики грунтов и охраны геологической среды. Ростов-на-Дону: изд.Рост.госуд.ун-та и НИИ механики и прикладной математики, 1998. С. 12-13.

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N2015619078. Определение напряженно-деформированного состояния оснований и фундаментов по деформациям с использованием нелинейных моделей DEFOR2.

6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

7. Эюбов А.А. Ползучесть лессовых просадочных грунтов при компрессии // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1986. №3. С. 29-31.

8. Месчан С.Р. Реологические процессы в глинистых грунтах. Ереван: Айастан, 1992. 392. с.

9. Чмшкян А.В. Совершенствование методов расчета просадочных деформаций // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть2) URL: ivdon.ru/magazine/achive/n4p2y2012/1256.

10. Филипов А.М. Аналитическое численное решение плоской контактной задачи с учетом ползучести материала// Инженерный вестник Дона, 2015, №1 URL: ivdon.ru/magazine/achive/nly2016/3510 .

11. Gioda, G. and A. Cividini, 1996. Numerical Methods for the Analysis of Tunnel Performance in squeezing Rocks. Rock Mechanics and Rock Engineering (issue 29(4)), Austria:Springer-Veriag, pp: 171-193.

12. Yin, Z.Y., C.S. Chang, M. Karstunen and P.Y. Hicher, 2010. An anisotropic elasticviscoplastic model for soft clays. International Journal of Solids and Structures, 47, pp: 665-677.

References

1. Vyalov S.S. Reologicheskie osnovy mekhaniki gruntov [Rheological Bases of the Soil Mechanics]. 1978 izd. M.: Vyssh.shkola, 1978. 447 p.

2. Zaretskiy Yu.K. Vyazkoplastichnost' gruntov i raschety sooruzheniy [Visco-plastics of Soils and Calculations of Constrructions]. M.: Stroyizdat, 1988. 352 p.

3. Vasilkov G.V., Dezhina I.Y., Orta-Rankhel A. Northern-Caucasus region. Estestvennie Nauki. 1998. №3. pp. 21-36.

4. Vasil'kov G.V., Dezhina I.Yu., Orta Rankhel'. Trudy VII shkoly-seminara “Sovremennye problemy mekhaniki gruntov i okhrany geologicheskoy sredy. Rostov-na-Donu: izd.Rost.gosud.un-ta i NII mekhaniki i prikladnoy matematiki, 1998. pp. 12-13.

5. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM N2015619078. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya osnovaniy i fundamentov po deformatsiyam s ispol'zovaniem nelineynykh modeley DEFOR2 [Determination of Tense and Deformed State of Grounds and Foundations According to Deformations Using the Non-Linear Models DEFOR2].
6 Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel. [Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies]. M.: Nauka, 1977. 384p.
7. Eyubov A.A. Polzuchest'. Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov. 1986. №3. pp. 29-31.
8. Meschan S.R. Reologicheskie protsessy v glinistykh gruntakh [Rheological Processes in Clay Soils]. Erevan: Ayastan, 1992. 392. p.
9. Chmshkyan A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 (part 2) URL: ivdon.ru/magazine/achive/n4p2y2012/1256.
10. Filipov A.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №1. URL: ivdon.ru/magazine/achive/nly2016/3510.
11. Gioda, G. and A. Cividini, 1996. Rock Mechanics and Rock Engineering (issue 29(4)), Austria:Springer-Veriag, pp. 171-193.
12. Yin, Z.Y., C.S. Chang, M. Karstunen and P.Y. Hicher, 2010. International Journal of Solids and Structures, 47, pp. 665-677.