Инженерный вестник Дона, №3 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2022/7516

Анализ эффективности методов решения систем линейных алгебраических уравнений при расчёте интегральных характеристик функционирования распределённых систем обработки информации

А. Н. Скоба, В. К. Михайлов, М.Л. Логанчук

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск

Аннотация: В работе приведены результаты численных экспериментов по решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разряжёнными матрицами методом *LU*-разложения, методом Якоби, методом Гаусса-Зейделя, модифицированным методом Гаусса-Зейделя и модифицированным методом Якоби с параметром релаксации ω. В ходе проведённых численных экспериментов по решению СЛАУ с тестовыми разряжёнными матрицами различной размерности с использованием пакета *MATLAB было* установлено, что наилучшие результаты по времени решения задачи были получены модифицированным методом Гаусса-Зейделя с параметром релаксации $\omega = 0{,}5$ при заданной точности решений $\varepsilon = 10^{-6}$. В дальнейшем, данный метод был использован при расчёте интегральных характеристик функционирования распределённых систем обработки информации для различных практических приложений.

Ключевые слова: распределенная система обработки информации, система линейных алгебраических уравнений, разряжённая матрица, *LU*-разложение, метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя, параметр релаксации.

Как было показано в работах [1,2], при вычислении стационарных вероятностей состояний сетей массового обслуживания (СеМО), которые в дальнейшем используются для вычисления интегральных характеристик функционирования распределённых систем обработки информации (СОИ), необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$e_{sr} = \sum_{j=1}^{m} e_{jr} P_{js}(r), s = \overline{1,m}, r = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где m- количество обслуживающих центров СеМО; n- количество классов сообщений, циркулирующих в СеМО; $P_{js}(r)$- вероятность того, что сообщение r-го класса, после обслуживания в j-ом центре попадёт на обслуживание в i-й центр. При этом, число независимых уравнений в СЛАУ вида (1) на единицу меньше количества переменных (данные СЛАУ являются линейно-зависимыми) и для нахождения их однозначного решения достаточно положить $e_{1r}=1,\left(r=\overline{1,n}\right)$[3].

С учётом того, что $e_{1r}=1,\left(r=\overline{1,n}\right)$, СЛАУ вида (1) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m} e_{jr}P_{js}(r)=1-P_{ss}(r), \text{ при } s=r, \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m} e_{jr}P_{js}(r)+e_{sr}(P_{ss}-1), \text{ при } s\neq r. \end{cases} \tag{2}$$

В свою очередь, СЛАУ вида (2) запишем в каноническом виде:

$$A(r)\bar{e}=\bar{b}, \tag{3}$$

где $A(r)=\left\|a_{js}(r)\right\|,\ \ j,s=\overline{1,m}, r=\overline{1,n};\ a_{js}(r)=\begin{cases} e_{jr}P_{js}(r),\ \ s=r, \\ e_{jr}P_{js}(r)+e_{sr}(P_{ss}-1),\ \ s\neq r; \end{cases}$

$\bar{e}=\left[e_{sr}\right]^T, \bar{b}=\left[b_s(r)\right]^T,\ s=\overline{1,m},\ \ r=\overline{1,n},$ причём

$$b_s(r)=\begin{cases} 1-P_{ss}(r),\ \ s=r, \\ 0,\ \ \text{иначе}. \end{cases}$$

Как видно из полученных соотношений, матрицами коэффициентов СЛАУ вида (3) являются матрицы переходных вероятностей $\left\|P_{js}(r)\right\|,(j,s=\overline{1,m},\ \ r=\overline{1,n})$, которые, как показал практический опыт их конструирования [1,2] являются разряженными (состоят, в основном, из нулей, а ненулевые элементы в них расположены неравномерно). Для решения такого рода СЛАУ, представляется целесообразным использование специальных численных методов решения систем с разряжёнными матрицами [4], таких, как метод квадратных корней (Халецкого), метод прогонки, *LU*-разложение, метод Гаусса-Зейделя, метод Якоби, метод последовательных приближений и т.д. Кроме того, как было отмечено в работе [4], эффективность использования данных численных методов также зависит от используемого формата хранения разряжённых матриц. Так, согласно [5], среди наиболее эффективных форматов их хранения можно выделить: координатный формат, разряжённый строчный формат (*CSR* – формат), разряжённый столбцовый формат (*CSC* – формат).

Для проверки эффективности решения СЛАУ вида (3) с разряжёнными матрицами, были выбраны [5,6]: *LU*-разложение, метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя. Так, в основе *LU*-разложения [5,6] лежит предположение о том, что матрица коэффициентов системы (3) может быть представлена в виде:

$$A(r) = L(r)U(r), \tag{4}$$

где $L(r)$ – нижнетреугольная матрица, $U(r)$ – верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Подставляя (4) в (3), получаем:

$$L(r)U(r)\bar{e} = \bar{b}\ . \tag{5}$$

Обозначим $U(r)\bar{e} = \bar{z}$ (6). Подставляя (6) в (5), получаем:

$$L(r)\bar{z} = \bar{b}. \tag{7}$$

Решая системы (6) и (7) одним из известных методов, например методом Жордана–Гаусса [5], получаем вектор $\bar{e}$.

Для метода Якоби [7,8], решение СЛАУ вида (3), получается по формуле:

$$e_{js}^{(k+1)}(r) = e_{js}^{(k)}(r) + \frac{1}{a_{jj}(r)}\left[b_j(r) - \sum_{j=1}^{m} a_{js}(r)e_{js}^{(k)}(r)\right],$$

где k – номер текущей итерации, $s = \overline{1,m}$, $r = \overline{1,n}$.

Согласно [7,8], каждое последующее приближение для СЛАУ вида (3), получаемое методом Гаусса-Зейделя, рассчитывается по формуле:

$$e_{js}^{(k+1)}(r) = e_{js}^{(k)}(r) + \frac{1}{a_{jj}(r)}\left[b_j(r) - \sum_{s=1}^{j-1} a_{js}e_{js}^{(k)}(r) - \sum_{s=j}^{m} a_{js}(r)e_{js}^{(k)}(r)\right],$$

k – номер итерации, $s = \overline{1,m}$, $r = \overline{1,n}$.

Окончание итерационного процесса для обоих методов происходит при выполнении условия:

$$\left\| e_{js}^{(k+1)}(r) - e_{js}^{(k)}(r) \right\| \le \varepsilon,\ \ j,s=\overline{1,m}\,, r=\overline{1,n}\,.$$

Условие сходимости итерационного процесса по методу Гаусса-Зейделя следует из теоремы [4], которая для СЛАУ вида (3) принимает следующий вид.

Теорема. Если для СЛАУ вида (3) выполнено хотя бы одно из трёх условий:

1) $\|\alpha\|_m < 1$, где $\|\alpha\|_m = \max\limits_j \sum\limits_{s=1}^{m} |\alpha_{js}(r)|$,

2) $\|\alpha\|_l < 1$, где $\|\alpha\|_l = \max\limits_s \sum\limits_{j=1}^{m} |\alpha_{js}(r)|$,

3) $\|\alpha\|_k < 1$, где $\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m} |\alpha_{js}|^2}$, $\alpha_{js}(r) = \dfrac{1}{\alpha_{jj}(r)} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{js}(r)$, $s=\overline{1,m}$,

$r=\overline{1,n}$, то итерационный процесс по методу Гаусса-Зейделя сходится к единственному решению.

Для сходимости же итерационного процесса по методу Якоби, достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения СЛАУ вида (3) были бы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов, исключая свободные члены, т.е. выполняется условие вида [4]:

$$|a_{jj}(r)| > \sum_{i \ne j} |a_{js}(r)|,\ \ j,s=\overline{1,m}\,,\ r=\overline{1,n}\,.$$

Для ускорения сходимости итерационного процесса по данным методам был использован параметр релаксации ω (0<ω≤1), с учётом которого искомые формулы для решения СЛАУ (3) принимают вид:

Для метода Гаусса-Зейделя:

$$\tilde{e}_{js}^{(k+1)}(r) = e_{js}^{(k)}(r) + \frac{1}{a_{jj}(r)}\left[b_j(r) - \sum_{s=1}^{j-1} a_{js} e_{js}^{(k)}(r) - \sum_{s=j}^{m} a_{js}(r) e_{js}^{(k)}(r)\right],$$

$$e_{js}^{(k+1)}(r) = \omega\tilde{e}_{js}^{(k+1)}(r) + (1-\omega)e_{js}^{(k)}(r),\ s = \overline{1,m},\ r = \overline{1,n};$$

Для метода Якоби, соответственно:

$$\tilde{e}_{js}^{(k+1)}(r) = e_{js}^{(k)}(r) + \frac{1}{a_{jj}(r)}\left[b_j(r) - \sum_{j=1}^{m} a_{js}(r) e_{js}^{(k)}(r)\right],$$

$s = \overline{1,m}$, $r = \overline{1,n}$;

$$e_{js}^{(k+1)}(r) = \omega\tilde{e}_{js}^{(k+1)}(r) + (1-\omega)e_{js}^{(k)}(r),\ \ 0<\omega<1,\ s = \overline{1,m},\ r = \overline{1,n}.$$

Численные эксперименты по решению СЛАУ с представленными методами были проведены с использованием пакета *MATLAB* [9,10] Для проведения численных экспериментов были использованы тестовые разряжённые матрицы (коллекция университета Флориды (*University of Florida Sparse Matrix Collection – cite.utf.edu/research/sparse/matrices/*). Условия сходимости выбранных тестовых матриц для данных методов были выполнены. Для хранения разряжённых матриц были использованы три вида формата: координатный формат, разряжённый строчный формат (*CSR*-формат), разряжённый столбцовый формат (*CSC*-формат). Результаты численных экспериментов по решению СЛАУ вида (3) с тестовыми разряжёнными матрицами приведены в таблицах 1-6. Так, в табл.1 приведено время решения СЛАУ методами: *LU*-разложения; Якоби; Якоби с параметром релаксации ω=0,6; Гаусса-Зейделя, методом Гаусса-Зейделя с параметром релаксации ω=0,5 Для всех методов была задана точность решения $\varepsilon=10^{-6}$.

Таблица 1

Размерность матрицы коэф-ов	Время решения СЛАУ,с				
	LU-разложение	Метод Якоби	Метод Якоби при ω =0,6	Метод Гаусса-Зейделя	Метод Гаусса-Зейделя ω =0,5
10×10	0,014	0,01	0,01	0,01	0,01
30×30	1,14	0,65	0,33	0,37	0,31
50×50	2,65	1,12	0,88	0,93	0,76
70×70	4,52	3,35	2,12	2,56	1,87
120×120	13,14	7,56	4,26	6,17	3,07

Для выбора оптимального параметра релаксации ω в модифицированных методах Якоби и Гаусса-Зейделя, был проведён ряд численных экспериментов по решению СЛАУ с разряжёнными матрицами для ω∈[0,1;1] с шагом *h*=0,1. Результаты численных экспериментов приведены в табл.2-3.

Таблица 2

Размерность матрицы коэф-ов	Время решения СЛАУ методом Якоби с параметром релаксации ω , с								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10×10	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
30×30	0,15	0,17	0,14	0,13	0,12	0,33	0,15	0,28	0,77
50×50	0,62	0,48	0,40	0,37	0,34	0,88	0,47	0,68	1,34
70×70	2,23	2,03	1,87	1,23	1,00	2,12	1,34	2,18	3,63
120×120	14,77	14,08	11,56	7,45	4,67	4,26	3,47	5,78	9,25

Таблица 3

Размерность матрицы коэф-ов	Время решения СЛАУ методом Гаусса-Зейделя с параметром релаксации ω , с								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10×10	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,03	0,02	0,02
30×30	0,22	0,32	0,19	0,17	0,31	0,38	0,14	0,37	0,74
50×50	053	0,65	0,78	0,97	0,76	0,31	0,65	0,96	1,43
70×70	2,68	2,77	2,48	1,49	1,87	0,56	1,86	2,87	4,00
120×120	15,11	15,02	16,56	8,44	3,07	4,40	4,94	5,86	8,95

Анализ полученных результатов показал, что наилучшие результаты по времени решения СЛАУ были получены: для модифицированного метода Якоби при ω=0,6; для модифицированного метода Гаусса-Зейделя при ω=0,5 (при заданной точности решения $\varepsilon=10^{-6}$). В табл.4-6 приведены показатели зависимости между размерностью разряжённых матриц, используемых при решении СЛАУ вида (3) и количеством выделяемой памяти при использовании различных форматов их хранения.

Таблица 4

Размерность матрицы коэф-ов	Координатный формат (МГб)				
	LU-разложение	Метод Якоби	Метод Якоби при ω =0,6	Метод Гаусса-Зейделя	Метод Гаусса-Зейделя ω =0,5
10×10	1,19	1,18	0,18	1,19	0,18
30×30	3,16	3,17	3,19	3,27	3,31
50×50	7,67	5,34	5,42	5,41	5,76
70×70	38,70	31,87	31,87	32,07	32,23
120×120	64,23	48,22	48,36	48,45	48,57

Таблица 5

Размерность матрицы коэф-ов	*CSR* – формат (МГб)				
	LU-разложение	Метод Якоби	Метод Якоби при ω =0,6	Метод Гаусса-Зейделя	Метод Гаусса-Зейделя ω =0,5
10×10	1,18	1,18	0,17	1,17	0,17
30×30	3,14	3,08	3,19	3,47	3,32
50×50	7,57	6,31	4,87	5,76	5,21
70×70	34,70	30,87	29,87	34,07	30,20
120×1200	57,23	46,11	44,21	46,45	44,33

Таблица 6

Размерность матрицы коэф-ов	*CSC* – формат (МГб)				
	LU-разложение	Метод Якоби	Метод Якоби при ω =0,6	Метод Гаусса-Зейделя	Метод Гаусса-Зейделя ω =0,5
10×10	1,18	1,21	1,22	1,19	1,21
30×30	4,14	4,04	4,11	4,47	4,22
50×50	8,34	7,12	7,88	7,76	6,91
70×70	44,72	42,18	32,87	35,33	32,20
120×120	66,03	57,14	45,06	49,39	58,95

Выводы

1. Начиная с размерности разряжённых матриц 30×30, итерационные методы решения СЛАУ (метод Якоби, модифицированный метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя, модифицированный метод Гаусса-

Зейделя) используют меньше времени и памяти ЭВМ, чем точный метод на основе *LU*-разложения.

2. Наиболее эффективной схемой хранения разряжённых матриц при решении СЛАУ вида (3) размерности (10×10,…,120×120) оказался разряжённый строчный формат (*CSR*– формат).

3. Наилучшие результаты по хранению разряжённых матриц (*CSR*–формат) при решении СЛАУ вида (3) размерности (10×10,…,120×120) были получены для модифицированного метода Якоби с параметром релаксации ω=0,6.

4. Полученные результаты численных экспериментов позволяют утверждать, что точный метод решения СЛАУ на основе *LU* – разложения требует больших затрат памяти на хранение разряжённых матриц, а кроме того, можно заметить, что с ростом размерности разряжённых матриц время на их «упаковку» также растёт.

5. На основе полученных результатов численных экспериментов можно также заключить, что наиболее эффективным методом решения СЛАУ с разряжёнными матрицами размерности (10×10,…,120×120) по времени решения – является модифицированный метод Гаусса-Зейделя с параметром релаксации ω=0,5 (при этом можно также заметить, что затраты памяти на хранение разряжённых матриц для данного метода являются «соизмеримыми» с затратами памяти для модифицированного метода Якоби с параметром релаксации ω=0,6).

6. В дальнейшем, модифицированный метод Гаусса-Зейделя с параметром релаксации ω=0,5 с разряжённым строчным форматом хранения матриц, был использован авторами для решения задачи оптимального размещения информационных ресурсов коллективного пользования (фрагментов распределённой базы данных – РБД) по узлам распределённой СОИ по критерию минимума среднего времени реакции системы на запросы

пользователей: 1) при создании программного модуля планирования космических полётов на МКС для ПАО «РКК «Энергия» г. Королёв; 2) при модернизации автоматизированной информационной системы на АО «Каменскволокно» г.Каменск-Шахтинский (для более рациональной организации вычислительного процесса и для обеспечения требуемых показателей её эффективности); 3) при создании распределённой корпоративной информационной системы санатория «Россиянка» г. Анапа (для получения основных интегральных характеристик разрабатываемой системы на этапе её проектирования – требуемой реактивности и надёжности).

Литература

1. Скоба А.Н., Состина Е.В. Математическая модель оптимального размещения распределенной базы данных по узлам ЛВС на базе двухуровневой клиент-серверной архитектуры // Инженерный вестник Дона. 2015. № 2. URL: ivdon.ru/ru/ magazine/archive/n2y2015/2882.

2. Скоба А.Н., Айеш Ахмед Нафеа Айеш Математическая модель функционирования распределённой информационной системы на базе трёхуровневой клиент-серверной архитектуры без учёта влияния блокировок // Инженерный вестник Дона. 2018. № 1. URL: ivdon.ru/ru/ magazine/archive/n1y2018/4685.

3. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. - М. : Радио и связь, 1988.-192с.

4. Еремеев В.А. Решение систем линейных алгебраических уравнений для больших разряжённых матриц: Учебно-методическое пособие. -г. Ростов-на –Дону, 2008. – 39с.

5. Свириденко А.Б. Прямые мультипликативные методы для разряжённых матриц. Несимметричные линейные системы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – Т.8, №6. – С.833-860.

6. Calgaro, C., Chehab J.P., Saad Y. Incremental incomplete LU factorizations with applications to time-dependent PDEs // Numer. Lin. Algebra with Appl, 2010. № 17(5). pp.811–837.

7. King L. P. An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived frome network problem // Internet J. Numer. Meth Engrg. 2(1990). pp.523-533.

8. Игнатьев А.В., Ромашкин В.Н. Анализ эффективности методов решения больших разряжённых линейных алгебраических уравнений // Интернет-Вестник Волг. ГАСУ. Сер: Строительная информатика. 2008. Вып.3(6). URL: vestnik.vgasu.ru.

9. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. – СПб: БВХ–Петербург, 2011. – 320с.

10. Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB7. Программирование, численные методы. – Спб. БВХ–Петербург, 2004. – 672с.

References

1. Skoba A.N., Sostina E.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2015. №2. URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2015/2882.

2. Skoba A. N., Ayesh Achmed Nafea Ayesh. Inzhenernyj vestnik Dona, 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/ magazine/archive/n1y2018/4685.

3. Zhozhikashvili V.A., Vishnevskij V.M. Seti massovogo obsluzhivaniya. Teoriya i primenenie k setyam E`VM [Queueing networks. Theory and its network application]. M., Radio i svyaz', 1988, 192p.

4. Eremeev V.A. Reshenie sistem linejny`x algebraicheskix uravnenij dlya bol`shix razryazhyonny`x matricz [Solving systems of linear algebraic

equations for large sparse matrices]. Uchebno-metodicheskoe posobie, Rostov-na-Donu, 2008, 39p.

5. Sviridenko A.B. Komp`yuterny`e issledovaniya i modelirovanie, 2016, T.8, №6, pp. 833-860.

6. Calgaro, C., Chehab J.P., Saad Y. Numer. Lin. Algebra with Appl, 2010. № 17(5), pp.811-837.

7. King L. P. Internet J. Numer. Meth Engrg. 2(1990), pp.523-533.

8. Ignat`ev A.V., Romashkin V.N. Internet-Vestnik Volg. GASU. Ser.: Stroitel`naya informatika, 2008. URL: vestnik.vgasu.ru.

9. Gorbachenko V.I. Vy`chislitel`naya linejnaya algebra s primerami na MATLAB [Computational linear Algebra with MATLAB examples]. Spb.: BVX–Peterburg, 2011, 320p.

10. Ketkov A.Yu., Shul`cz M.M. MATLAB7. Programmirovanie, chislenny`e metody` [MATLAB 7. Programming, numerical methods]. Spb.: BVX–Peterburg, 2004, 672p.