Описание потенциальной функции для уточненного уравнения линий тока

В.Н. Коханенко, М.Ф. Мицик, О.А. Алейникова

Определение параметров свободного растекания потока за водопропускными отверстиями в широкое отводящее русло имеет важное прикладное значение для проектирования сооружений дорожного водоотвода. При этом полагают дно отводящего русла горизонтальным, а поток двухмерным в плане.

В работах [1, 2, 3] показано, что силами сопротивления потоку в области крепления отводящего русла можно пренебречь. Поэтому дополнительно полагаем поток потенциальным и стационарным. Выводы применимости полученного результата сделаем по степени адекватности модели и реального потока по его параметрам.

Рассмотрим схему течения потока в плане.

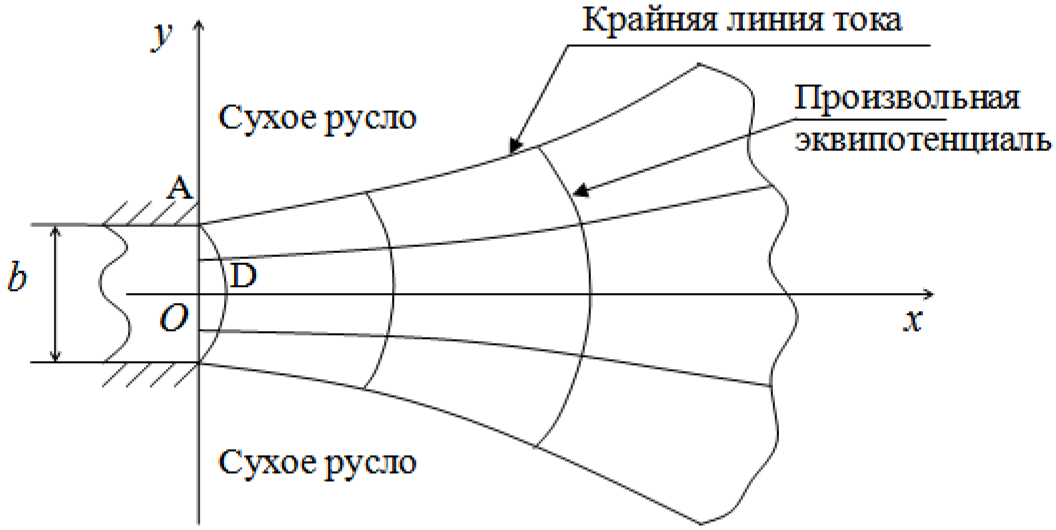

Рисунок 1 – План растекания потока в терминах линия тока, эквипотенциаль

Для формулировки задачи в физической плоскости течения сформулируем свойства бурного потока. Известны параметры h_0, V_0, b на выходе потока из прямоугольного безнапорного отверстия в широкое отводящее русло:

$h_0 -$ глубина потока;

$V_0 -$ модуль вектора скорости;

$b -$ ширина выходного отверстия.

Перейдем от физической плоскости течения потока [4, 5] к использованию уравнений движения потока в плоскости годографа скорости. Система уравнений движения потока в плоскости годографа скорости представлена в форме [6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \dfrac{2h_0}{H_0} \dfrac{\tau}{1-\tau} \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}; \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \dfrac{h_0}{2H_0} \dfrac{3\tau - 1}{\tau(1-\tau)^2} \dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \tag{1}$$

где: $\varphi -$ потенциальная функция;

$\psi -$ функция тока;

$\theta -$ угол между вектором скорости жидкой частицы потока и осью OX;

$\tau = \dfrac{V^2}{2gH_0} -$ нормированный модуль вектора скорости.

В работе [7] получено уравнение крайней линии тока в виде

$$\psi = A_1 \frac{\sin\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}} - \frac{C \sin(\theta - \theta_{\max})(1-\tau)^2}{\tau^{\frac{1}{2}}} = \frac{V_0 b}{2}, \tag{2}$$

где: $A = \dfrac{V_0 b}{2\sin\theta_{\max}}$; $C = \dfrac{V_0 b\, \tau_0^{1/2}}{2(1-\tau_0)^2 \sin\theta_{\max}}$.

Найдем уравнение для произвольной эквипотенциали. Воспользуемся сначала первым уравнением из (1). Для этого найдем из (2)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=-\frac{A}{2}\frac{\sin\theta}{\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{2C\sin(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}}+\frac{C\sin(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)^2}{2\tau^{\frac{3}{2}}}= \tag{3}$$

$$=-\frac{A}{2}\frac{\sin\theta}{\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{C\sin(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)(3\tau+1)}{2\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставим выражение (3) в первое уравнение системы (1), получим уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2h_0}{H_0}\frac{\tau}{1-\tau}\left(-\frac{A}{2}\frac{\sin\theta}{\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{C\sin(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)(3\tau+1)}{2\tau^{\frac{3}{2}}}\right),$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{h_0}{H_0}\left(\frac{A\sin\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}-\frac{C\sin(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{4}$$

Интегрирование уравнения (4) по переменной θ приводит к зависимости

$$\varphi=\frac{Ah_0}{H_0}\frac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}-\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}+C_1(\tau), \tag{5}$$

где $C_1(\tau)-$ неизвестная функция по переменной τ.

Для нахождения $C_1(\tau)$ воспользуемся вторым уравнением системы (1). Вычисляем производную по τ от потенциальной функции φ в форме (5)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{Ah_0}{H_0}\frac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}-\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}+C_1(\tau)\right)=$$

$$=\frac{Ah_0}{2H_0}\frac{(3\tau-1)\cos\theta}{\tau^{\frac{3}{2}}(1-\tau)^2}-\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau-1)}{2H_0\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau}. \tag{6}$$

Найдем производную $\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{A\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}}-\frac{C\cos(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)^2}{\tau^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Подставим выражения (6) и (7) во второе уравнение системы (1), получим

$$\frac{Ah_0}{2H_0}\frac{(3\tau-1)\cos\theta}{\tau^{\frac{3}{2}}(1-\tau)^2}-\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau-1)}{2H_0\tau^{\frac{3}{2}}}+\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau}=$$
$$\frac{h_0}{2H_0}\frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}\left(\frac{A\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}}-\frac{C\cos(\theta-\theta_{\max})(1-\tau)^2}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что после упрощений уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial C_1(\tau)}{\partial\tau}=0,$$

или

$$C_1=const. \tag{9}$$

Таким образом, искомое выражение для потенциальной функции имеет вид

$$\varphi=\frac{Ah_0}{H_0}\frac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}-\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}+C_1. \tag{10}$$

Функция (10) является решением уравнения (1) при любом значении постоянной C_1, в частности, при $C_1=0$. Значение константы C_1 может быть определено в конкретной двухмерной плановой задаче.

Изучим поведение каждого из слагаемых, входящих в выражение для потенциальной функции. Пусть $C_1=0$. Представим потенциальную функцию в форме

$$\varphi=\varphi_1-\varphi_2. \tag{11}$$

где: $\varphi_1=\dfrac{Ah_0}{H_0}\dfrac{\cos\theta}{\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}$; $\varphi_2=\dfrac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{H_0\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)}{Ah_0\cos\theta}\frac{Ch_0\cos(\theta-\theta_{\max})(3\tau+1)}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{(1-\tau)C\cos(\theta-\theta_{max})(3\tau+1)}{A\cos\theta} \tag{12}$$

Найдем значение величины $\frac{C}{A}$

$$\frac{C}{A}=\frac{2\sin\theta_{max}}{V_0 b}\frac{V_0 b\tau_0^{1/2}}{2(1-\tau_0)^2\sin\theta_{max}}=\frac{\tau_0^{1/2}}{(1-\tau_0)^2}. \tag{13}$$

Упростим правую часть равенства (12)

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{(1-\tau)\cos(\theta-\theta_{max})(3\tau+1)}{\cos\theta}\frac{\tau_0^{1/2}}{(1-\tau_0)^2} \tag{14}$$

Как известно из [1], вниз по течению потока $\tau\to 1$, соответственно в выражении $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, что нетрудно видеть из (14), числитель стремится к нулю, а знаменатель всегда отличен от нуля. Таким образом, $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\to 0$ при $\tau\to 1$, то есть вниз по течению потока в формуле (11) влияние первого слагаемого становится преобладающим.

Плановые задачи гидравлики решаются также и численными методами [8, 9, 10], однако аналитические методы решения двухмерных плановых задач позволяют более глубоко и всесторонне изучить свойства двухмерных бурных потоков.

Выводы по работе.

1. Выражение для потенциальной функции в виде (11) соответствует качественно и количественно экспериментальным данным (неразрывности по параметрам потока, адекватности модели).
2. Роль слагаемого $\varphi_2=\frac{Ch_0(3\tau+1)\cos(\theta-\theta_{max})}{H_0\tau^{\frac{1}{2}}}$ в выражении (11) асимптотически уменьшается с ростом τ вниз по течению потока.

Литература:

1. Коханенко, В.Н. Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

2. Ширяев, В.В. Развитие теории двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская: под общей ред. В.В. Ширяева. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 133 с.

3. Takeda, R. Theoretical research an propeller type current meters [Текст] / R. Takeda // Trans. ASME. – 1975, A. 97, № 4. – P. 599-602.

4. Мицик, М.Ф. Моделирование потенциальной функции двухмерного планового потока в параметрической форме [Текст] // Математические методы в технике и технологиях: Сб. тр. VI межд. науч. конф. / Под общей ред. В.С. Балакирева. – РТАСМ ГОУ, Ростов н/Д, 2003. – Т. 7, секция 7. – С. 103-104.

5. Мицик, М.Ф. Растекание двухмерного планового потока в нижнем бьефе водопропускных сооружений [Текст]: дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. – Новочеркасск, 2006. – 238 с.

6. Косиченко, Н.В. Анализ изучения и уточнения методов свободного растекания потока за безнапорными водопропускными отверстиями [Текст] / Н.В. Косиченко // Вестник СГАУ. – Саратов, 2011, № 9. – С. 27-33.

7. Коханенко В.Н., Мицик М.Ф., Косиченко Н.В. Уточненное уравнении крайней линии тока в плоскости годографа скорости в задаче свободного растекания бурного потока за безнапорными водопропускными трубами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2013. №1. С. 33-35.

8. Takeda, R. The influence of turbulence on the characteristic of the propeller current meters [Текст] / R. Takeda, M. Kawanami // Trans. Soc. Mtch. Eng.– 1978, № 383. – V. 44. – P. 2389- 2394.

9. Онишкова А.М. Численное решение задачи для плоской области со свободной границей. [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4. – Режим доступа: http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p1y2012/1205 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Хекмат К. Двумерная математическая модель жидкости водоема с учетом наличии на поверхности ледяной пластины [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2011, №4. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4y2011/583 (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.