

Аналитическое численное решение плоской контактной задачи с учетом ползучести материала

А.М. Филипов

ВолгГАСУ, Волгоград

Аннотация: в статье рассмотрено решение с практически значимой точностью интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода для плоской контактной задачи, учитывающей старение и ползучесть материала. Полученное решение ориентировано на использование доступных программных вычислительных средств.

Ключевые слова: решение плоской контактной задачи, численное решение, учет ползучести материала.

Не редко в инженерной и научной практике возникает необходимость в выполнении анализа контактного взаимодействия двух тел [1,2] с учетом учета старения и ползучести материала.

Данная задача может быть решена аналитически [3,4], однако при этом возникает необходимость в решении интегральных или интегрально-дифференциальных уравнений. Одно из таких решений описано в работах [5,6].

Стоит так же отметить, что аналитическое решение обладает избыточной точностью получаемого результата. Так, например, при анализе контактного взаимодействия стального каната 15К7 (штампа) с бетонным каналобразователем (основанием), основываясь на технических требованиях по точности их изготовления и характеристиках материалов, нет смысла в получении результата, многократно превышающего возможные геометрические отклонения.

Общий вид уравнений описывающих состояния тела на основании [6,7] имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{ij}(x, t) &= \frac{s_{ij}(x, t)}{2G(t+\alpha(x), x)} - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{s_{ij}(x, \tau)}{2G(\tau+\alpha(x), x)} K_1(t + \alpha(x), \tau + \alpha(x), x) d\tau \\ \varepsilon_{kk}(x, t) &= \frac{\sigma_{kk}(x, t)}{2G(t+\alpha(x), x)} - \\ &- \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_{kk}(x, \tau)}{E^*(\tau+\alpha(x), x)} K_2(t + \alpha(x), \tau + \alpha(x), x) d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau_i^*(y)$ – момент изготовления элемента, характеризуемого вертикальной координатой y , τ_0 – момент приложения штампа, t – время приложения нагрузки, x – горизонтальная координата рассматриваемого пространства, K_1 и K_2 – ядра ползучести, ε_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и напряжений, e_{ij} и s_{ij} – девиаторные компоненты тензоров деформаций и напряжений, E и G – упругомгновенные модули деформации при сжатии и чистом сдвиге, α – функция неоднородного старения.

С учетом независимости от времени к-нта Пуассона и деформации ползучести и упруго-мгновенной деформации материала итоговое уравнение, полученное из уравнений (1), имеет вид:

$$\begin{aligned} q(a)c_1 h - q(a)c_1 \int_0^t \int_0^h K(y) dy dz + \\ + \frac{4c_1}{\pi} \left(\int_0^a q(y) k\left(\frac{x-y}{H}\right) dy - \int_0^t \int_0^a q(y) k\left(\frac{x-y}{H}\right) dy K(z) dz \right) - \\ - g(x) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$c_1 = \frac{1-\nu^2}{E_{b2B}}, \quad (3)$$

$$k(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du, \quad (4)$$

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch}(2u)-1}{\operatorname{sh}(2u)+2u}, \quad (5)$$

Функция $g(x)$ – функция учета формы штампа.

Уравнение (2) совместно с (3)-(5) является уравнением Вольтера 2-го рода. Его можно решить описанным в [8] способом, а можно воспользоваться доступным математическим программным комплексом (далее ПК), получив решение с некоторой несоизмеримо малой погрешностью. Этот способ решения основан на замене подынтегральной функции $k(s)$. Рассмотрим его более подробно.

Функции (4) и (5) после подстановки имеют вид

$$k(s) = \int_0^{\infty} \frac{(\cosh(2u)-1) \cos(su)}{u \times \sinh(2u) + 2u^2} du, \quad (6)$$

Согласно [9] данный интеграл не имеет первообразной. Однако, уравнение (6) можно записать в виде:

$$f_1(su) = \frac{0.5(e^{2u}-e^{-2u})-1}{0.5(e^{2u}+e^{-2u})+2u} \times \frac{\cos(su)}{u}, \quad (7)$$

При выполнении операций с плавающей точкой на ПК точность вычислений определяется [10], соответственно, при выполнении операций сложения и вычитания над числами, значения которых различаются на порядок используемой точности представления числа, наименьшее из чисел будет проигнорировано [11]. В таком случае при достижении определенного значения переменной u , с учетом 15 знаков в дробной части для двойной точности вычислений, выражение (7) будет эквивалентно:

$$f_2(su) = \frac{0.5e^{2u} - 1.5}{0.5e^{2u} + 2u + 0.5} \times \frac{\cos(su)}{u}, \quad (8)$$

а при дальнейшем увеличении:

$$f_3(su) = \frac{\cos(su)}{u}, \quad (9)$$

Соответственно выражение (6) можно представить как

$$k(s) = \int_0^{i_1} f_1(su) du + \int_{i_1}^{i_2} f_2(su) du + \int_{i_2}^{i_3} f_3(su) du, \quad (10)$$

где i_1 , i_2 и i_3 – границы интервалов для подынтегральных функций, далее которых абсолютная разность в значениях функций не превышает требуемую величину.

И, соответственно, интервалы (с округлением в большую сторону) $i_1=10.00$, $i_2=21.00$ и $i_3=10^5$. Интервал i_3 – «условная бесконечность». Поведение функции $k(s)$ при этом будет иметь вид (см. рис.1). Как видно из предоставленного графика, при ожидаемых значениях u в интервале $0,00\dots0,05$, т.е. при анализе материалов, обладающих заметной прочностью, условную бесконечность можно принять в интервале $5\,000\dots10\,000$ без заметной потери точности.

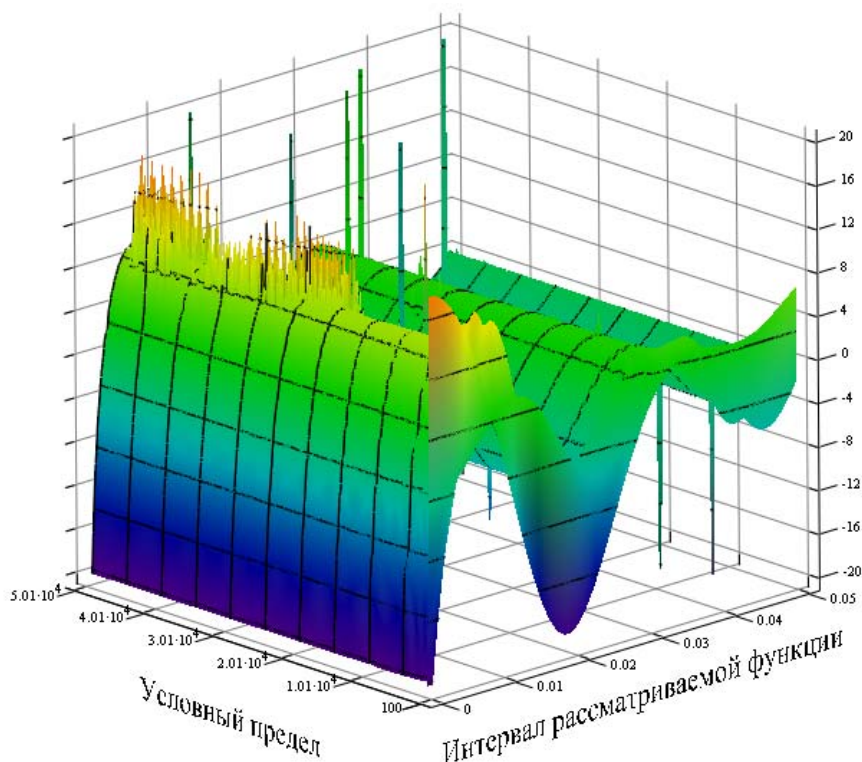


Рис. 1. – График зависимости функции $k(s)$ на интервале $0,0\dots0,05$ от значения условной бесконечности.

Литература

1. Бескопыльный А.Н., Веремеенко А.А. Задача о статическом внедрении конического индентора в область с радиальными начальными

- напряжениями // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2) URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368
2. Чмшкян А.В. Взаимодействие конического штампа с неоднородным основанием // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2) URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391
 3. Fischer-Cripps, A.C., 2007. Introduction to Contact Mechanics. Springer-Verlag US, pp: 248.
 4. Wriggers, P. and T.A. Laursen, 2008. Computational Contact Mechanics. Springer, pp: 248.
 5. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ООО "ЦВВР", 2007. 116 с.
 6. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН Армянской ССР Институт механики, 1990. 318 с.
 7. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 326 с.
 8. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 302 с.
 9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7 изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 1232 с.
 10. IEEE -754-2008 Standard for Floating-Point Arithmetic. pp.1-70, 2008.
 11. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. В 3-х ч. Часть 1. М.: Диалог-МИФИ, 2013. 316 с.

References

1. Beskopyl'nyy A.N., Veremeenko A.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1368
2. Chmshkyan A.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL:
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1391



3. Fischer-Cripps, A.C., 2007. Introduction to Contact Mechanics. Springer-Verlag US, pp: 248.
4. Wriggers, P. and T.A. Laursen, 2008. Computational Contact Mechanics. Springer, pp: 248.
5. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. Vvedenie v mekhaniku kontaknykh vzaimodeystviy [Introduction to contact mechanics]. Rostov-na-Donu: OOO "TsVVR", 2007. 116 p.
6. Arutyunyan N.Kh., Manzhurov A.V. Kontaknyye zadachi teorii polzuchesti [Contact problems of the theory of creep]. Erevan: Izd-vo AN Armyanskooy SSR Institut mekhaniki, 1990. 318 p.
7. Arutyunyan N.Kh., Manzhurov A.V., Naumov V.E. Kontaknyye zadachi mekhaniki rastushchikh tel [Contact problems of the mechanics of growing bodies]. M.: Nauka, 1991. 326 p.
8. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. Analiticheskie metody v kontaknykh zadachakh teorii uprugosti [The analytical methods in contact problems of the theory of elasticity]. M.: Fizmatlit, 2004. 302 p.
9. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy 7 izd [Tables of integrals, Series and Products. Seventh Edition]. . SPb.: BKhV-Peterburg, 2011. 1232 p.
10. IEEE - 754-2008 Standard for Floating-Point Arithmetic. pp.1-70, 2008
11. Barten'ev O. V. Fortran dlya professionalov. Matematicheskaya biblioteka IMSL. V 3-kh ch. Chast' 1 [Fortran for professionals. Mathematical Library IMSL. In 3's parts. Part 1]. M.: Dialog-MIFI, 2013. 316 p.