Инженерный вестник Дона, №11 (2022)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n11y2022/8005

Анализ бесконечных систем линейных уравнений в задаче сложных колебаний защемленной прямоугольной пластины

С.О. Папков, Ю.И. Папкова

Севстопольский государственный университет, Севастополь

Аннотация: Рассматривается задача о сложных (гибких) колебаниях защемленной по контуру прямоугольной ортоторпной пластины. Общее решение задачи, тождественно удовлетворяющее уравнению колебаний, строится на основе метода суперпозиции в форме двух рядов Фурье. Граничные условия полного защемления приводят к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении. Доказывается единственность ограниченного нетривиального решения бесконечной системы на собственной частоте колебаний, находится асимптотика неизвестных, строится эффективный алгоритм решения. Приводятся примеры численной реализации разработанного алгоритма для вычисления собственных частот и собственных форм колебаний пластины.

Ключевые слова: пластина, колебания, собственные частоты, планарные силы, метод суперпозиции, бесконечная система линейных уравнений, асимптотика.

Введение

Задача о поперечных колебаниях прямоугольной пластины относится к числу старейших классических проблем. Еще в начале XIX века опыты с демонстрацией фигур Хладни, благодаря эстетическому аспекту, привлекли внимание широкой общественности к проблеме колебания пластин. Попытки математического описания проблемы, в свою очередь, дали мощный толчок к развитию аппарата математической физики. Чрезвычайная важность пластины, как элемента в структурной механике и инженерных приложениях, привела к появлению большого числа работ, где проблема колебаний изучалась на основе различных подходов [1 - 3]. Тем не менее, несмотря на долгую историю, точное аналитическое решение задачи о поперечных колебаниях прямоугольной пластины удалось построить лишь для случая, когда две противоположные стороны пластины шарнирно-оперты, в остальных случаях используются приближенные подходы, хотя попытки построения точного решения для иных граничных условий до сих пор продолжаются [4, 5].

Ниже рассматривается задача о сложных колебаниях ортотропной прямоугольной пластины с защемленными краями, которая сводится к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На основе обобщения [6] закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича, построен эффективный алгоритм вычисления собственных частот и форм пластины.

Математическая модель

Рассмотрим колебания прямоугольной ортотропной пластины $\{(x,y)\in[-a;a]\times[-b;b]\}$ толщины h, равномерно сжатой под действием нагрузок N_x и N_y перпендикулярно ее сторонам. Уравнение сложных колебаний пластины относительно прогиба $w(x,y,t)=W(x,y)\mathrm{e}^{i\omega t}$ имеет вид:

$$D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}+N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-D_1\Omega^4 W=0 \quad (1)$$

где $\Omega=a\sqrt[4]{\omega^2\rho h/D_1}$ - безразмерный частотный параметр, ρ – плотность материала, ω – круговая частота, D_1, D_2, D_3 - упругие постоянные.

Условия жесткого защемления всех сторон пластины имеют вид:

$$\text{при } x=\pm a:\ W=0;\quad \phi_y=\frac{\partial W}{\partial x}=0 \quad (2)$$

$$\text{при } y=\pm b:\ W=0;\quad \phi_x=\frac{\partial W}{\partial y}=0 \quad (3)$$

Для построения общего решения уравнения (1) используем метод суперпозиции, описанный в [7]. Следуя данному подходу, общее решение задачи может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат:

$$W=W_{00}+W_{01}+W_{10}+W_{11} \quad (4)$$

Разделяя переменные в уравнении (1) получаем общее решение в виде

$$W_{kj}=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n H_j(p_{nk}y)+B_n H_j(\bar{p}_{nk}y))T_k(\alpha_{nk}x)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n H_k(q_{nj}x)+D_n H_k(\bar{q}_{nj}x))T_j(\beta_{nj}y) \quad (5)$$

где тригонометрические и гиперболические функции в зависимости от типа симметрии обозначены, как:

$$T_j(z)=\begin{cases}\cos z, & j=0\\ \sin z, & j=1\end{cases};\; H_j(z)=\begin{cases}\operatorname{ch} z, & j=0\\ \operatorname{sh} z, & j=1\end{cases}.$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту тригонометрических рядов (4) на границе пластины:

$$\alpha_{nj}=\frac{\pi}{a}\left(n-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right),\quad \beta_{nj}=\frac{\pi}{b}\left(n-\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right), \tag{6}$$

Величины $p_{nk},\bar{p}_{nk}$ и $q_{nj},\bar{q}_{nj}$ являются корнями следующих характеристических уравнений:

$$D_2p^4+(N_y-2D_3\alpha^2)p^2+D_1\alpha^4-N_x\alpha^2-D_1\Omega^4=0, \tag{7}$$

$$D_1q^4+(N_x-2D_3\beta^2)q^2+D_2\beta^4-N_y\beta^2-D_1\Omega^4=0, \tag{8}$$

Заметим, выбор констант разделения в форме (6) приводит для любого типа симметрии к тождеству $T_k(\alpha_{nk}a)=T_j(\beta_{nj}b)=0$, что позволяет выполнить краевые условия на функцию прогиба W тождественно, если положить:

$$C_n=-D_n\frac{H_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)};\; A_n=-B_n\frac{H_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)}. \tag{9}$$

Подстановка соотношений (9) в условия на углы поворота ϕ_y и ϕ_x приводит к двум функциональным уравнениям вида:

$$\left.\frac{\partial W_{kj}}{\partial x}\right|_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nB_nH_j(\bar{p}_{nk}b)\alpha_{nk}\left(\frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)}-\frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}D_nH_k(\bar{q}_{nj}a)\left(\bar{q}_{nj}\frac{H'_k(\bar{q}_{nj}a)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)}-q_{nj}\frac{H'_k(q_{nj}a)}{H_k(q_{nj}a)}\right)T_j(\beta_{nj}y)=0 \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial W_{kj}}{\partial y}\right|_{y=b}=\sum_{n=1}^{\infty}B_nH_j(\bar{p}_{nk}b)\left(\bar{p}_{nk}\frac{H'_j(\bar{p}_{nk}b)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)}-p_{nk}\frac{H'_j(p_{nk}b)}{H_j(p_{nk}b)}\right)T_k(\alpha_{nk}x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nD_nH_k(\bar{q}_{nj}a)\beta_{nj}\left(\frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)}-\frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)}\right)=0 \tag{11}$$

Далее, для определения неизвестных коэффициентов Фурье B_n и D_n используем разложения по тригонометрической системе функций:

$$\frac{H_j(\bar{p}_{nk}y)}{H_j(\bar{p}_{nk}b)}-\frac{H_j(p_{nk}y)}{H_j(p_{nk}b)}=\frac{2(\bar{p}_{nk}^2-p_{nk}^2)}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\beta_{mj}T_j(\beta_{mj}y)}{(\beta_{mj}^2+\bar{p}_{nk}^2)(\beta_{mj}^2+p_{nk}^2)} \tag{12}$$

$$\frac{H_k(\bar{q}_{nj}x)}{H_k(\bar{q}_{nj}a)}-\frac{H_k(q_{nj}x)}{H_k(q_{nj}a)}=\frac{2(\bar{q}_{nj}^2-q_{nj}^2)}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\alpha_{mk}T_k(\alpha_{mk}x)}{(\alpha_{mk}^2+\bar{q}_{nj}^2)(\alpha_{mk}^2+q_{nj}^2)}. \tag{13}$$

Подстановка (12), (13) в равенства (10), (11) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} Z_{2m-1}&=\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}\frac{2}{\Delta_{1,m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nk}Z_{2n}}{(\alpha_{nk}^2+q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2+\bar{q}_{mj}^2)}\\ Z_{2m}&=\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\frac{2}{\Delta_{2,m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{nj}Z_{2n-1}}{(\beta_{nj}^2+p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2+\bar{p}_{mk}^2)}\end{aligned}\qquad (m=1,\,2,\,\ldots) \tag{14}$$

относительно неизвестных:

$$Z_{2m-1}=\frac{D_1}{a}(-1)^m D_m H_k(\bar{q}_{mj}a)(\bar{q}_{mj}^2-q_{mj}^2),\ Z_{2m}=\frac{\sqrt[4]{D_1D_2^3}}{b}(-1)^{m+1}B_mH_j(\bar{p}_{mk}b)(\bar{p}_{mk}^2-p_{mk}^2),$$

$$\Delta_{1,m}=\frac{a}{\beta_{mj}(\bar{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\left(\bar{q}_{mj}\frac{H_k'(\bar{q}_{mj}a)}{H_k(\bar{q}_{mj}a)}-q_{mj}\frac{H_k'(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)}\right),$$

$$\Delta_{2,m}=\frac{b}{\alpha_{mk}(\bar{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\left(\bar{p}_{mk}\frac{H_j'(\bar{p}_{mk}b)}{H_j(\bar{p}_{mk}b)}-p_{mk}\frac{H_j'(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)}\right).$$

Анализ бесконечной системы.

Для оценки регулярности бесконечной системы (14) используем дигамма-функцию $\psi(z)$, которая позволяет точно вычислить ряды из модулей коэффициентов бесконечной системы:

$$\begin{aligned} S_{2m-1}&=\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}\frac{2}{|\Delta_{1,m}|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nk}}{(\alpha_{nk}^2+q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2+\bar{q}_{mj}^2)}=\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_1}}\frac{a}{\pi|\Delta_{1,m}|(\bar{q}_{mj}^2-q_{mj}^2)}\left(\psi\left(\frac{1+k}{2}+\frac{ia\bar{q}_{mj}}{\pi}\right)-\right.\\ &\left.-\psi\left(\frac{1+k}{2}+\frac{iaq_{mj}}{\pi}\right)+\psi\left(\frac{1+k}{2}-\frac{ia\bar{q}_{mj}}{\pi}\right)-\psi\left(\frac{1+k}{2}-\frac{iaq_{mj}}{\pi}\right)\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$S_{2m}=\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\frac{2}{|\Delta_{2,m}|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{nj}}{(\beta_{nj}^2+p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2+\bar{p}_{mk}^2)}=\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}\frac{b}{\pi|\Delta_{2,m}|(\bar{p}_{mk}^2-p_{mk}^2)}\left(\psi\left(\frac{1+j}{2}+\frac{ib\bar{p}_{mk}}{\pi}\right)-\right.$$

$$-\psi\left(\frac{1+j}{2}+\frac{ibp_{mk}}{\pi}\right)+\psi\left(\frac{1+j}{2}-\frac{ib\overline{p}_{mk}}{\pi}\right)-\psi\left(\frac{1+j}{2}-\frac{ibp_{mk}}{\pi}\right)\Bigg). \quad (16)$$

Учитывая асимптотику выражений при $m\to\infty$:

$$p_{mk}=P_+\alpha_{mk};\ \overline{p}_{mk}=P_-\alpha_{mk};\ q_{mj}=Q_+\beta_{mj};\ \overline{q}_{mj}=Q_-\beta_{mj},\ \Delta_{1,m}=\frac{a}{(Q_++Q_-)\beta_{mj}^2};$$

$$\Delta_{2,m}=\frac{a}{(P_++P_-)\beta_{mj}^2},\ Q_\pm=\sqrt{\frac{D_3\pm\sqrt{D_3^2-D_1D_2}}{D_1}},\ P_\pm=\sqrt{\frac{D_3\pm\sqrt{D_3^2-D_1D_2}}{D_2}}$$

и поведении дигамма функции:

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\ldots\quad (z\to\infty,\quad |\arg z|<\pi), \quad (17)$$

можно найти, что при увеличении номера m ряды в условиях регулярности системы (14) стремятся к одному и тому же значению предела, зависящему от комбинации упругих констант $\sqrt{D_1D_2}/D_3=t$ как:

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\frac{\sqrt{2t}\operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}}{\pi\sqrt{t-1}}<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (18)$$

Таким образом, из оценки (18) следует, что для бесконечной системы (14) всегда найдется такой номер N_R, начиная с которого сумма модулей коэффициентов строго меньше единицы, т.е. будут выполняться условия квазирегулярности. Это, в свою очередь, позволяет использовать [8] разложение системы (14) на совокупность вполне регулярных бесконечных систем и одну конечную систему. Действительно, замена вида:

$$Z_m=\sum_{l=1}^{N_R}\chi_m^l Z_l\quad (m>N_R) \quad (19)$$

приводит бесконечную систему (14) к совокупности вполне регулярных бесконечных систем относительно χ_m^l с одинаковой матрицей:

$$\chi_m^l=\sum_{n=N_R+1}^{\infty}M_{mn}\chi_n^l+M_{ml},\quad (m=N_R+1,N_R+2,\ldots) \quad (20)$$

где M_{mn} - коэффициенты системы (14).

Так как константа в (18) строго меньше единицы, то из ограниченности M_{ml}, выступающих в роли свободных членов (20), следует, что каждая из систем (20) имеет единственное ограниченное решение. Таким образом, вопрос о существовании ограниченного решения для исходной квазирегулярной системы (14) сводится к вопросу существования решения у конечной системы относительно первых неизвестных $\{Z_m\}_{m=1}^{N_R}$:

$$Z_m = \sum_{n=1}^{N_R}\left(M_{mn} + \sum_{l=N_R+1}^{\infty} M_{ml}\chi_l^n\right) Z_n, \qquad (m = 1, 2, \ldots, N_R) \tag{21}$$

Равенство нулю определителя конечной системы (21) также дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот пластины.

Найдем аналитически асимптотику решений систем (20). С этой целью проведем замену переменных вида:

$$\chi_{2m-1}^l = D_1^{\frac{1}{4}} \beta_{mj}^{-1} y_m^l; \quad \chi_{2m}^l = D_2^{\frac{1}{4}} \alpha_{mk}^{-1} x_m^l \quad . \tag{22}$$

Тогда преобразованные системы (20) для каждого l = 1, 2,…, N_R принимают вид $(2N_r = N_R; \quad m = N_r + 1, N_r + 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} y_m^l &= \frac{2\beta_{mj}}{\Delta_{1,m}} \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{x_n^l}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \frac{M_{2m-1,l}\beta_{mj}}{D_1^{1/4}}; \\ x_m^l &= \frac{2\alpha_{mk}}{\Delta_{2,m}} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \sum_{n=N_r+1}^{\infty} \frac{y_n^l}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \frac{M_{2m,l}\alpha_{mk}}{D_2^{1/4}} \end{aligned} \tag{23}$$

и удовлетворяют обобщению закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича при:

$$r_n^{(1)} = r_n^{(2)} = 1; \quad \xi_m^{(1)} = \beta_{mj}; \quad \xi_m^{(2)} = \alpha_{mk}. \tag{24}$$

Действительно, используя известные значения рядов [9], можно получить, используя введенные выше обозначения, следующие формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nk}^2 + q^2} = \frac{a}{2q} \cdot \frac{H_k'(qa)}{H_k(qa)} - \frac{\delta_{k1}}{2q^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_{nk}^2 + p^2} = \frac{b}{2p} \cdot \frac{H_j'(pb)}{H_j(pb)} - \frac{\delta_{j1}}{2p^2}.$$

Тогда для системы (24) ряды в условиях регулярности можно вычислить точно:

$$S_{2m-1}^{N_r}=2\beta_{mj}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left(\beta_{mj}\frac{\dfrac{H_k'(\bar q_{mj}a)}{\bar q_{mj}H_k(\bar q_{mj}a)}-\dfrac{H_k'(q_{mj}a)}{q_{mj}H_k(q_{mj}a)}+\dfrac{\delta_{k1}(\bar q_{mj}^2-q_{mj}^2)}{aq_{mj}^2\bar q_{mj}^2}}{\dfrac{q_{mj}H_k'(\bar q_{mj}a)}{H_k(\bar q_{mj}a)}-\dfrac{\bar q_{mj}H_k'(q_{mj}a)}{H_k(q_{mj}a)}}-\frac{1}{|\Delta_{1,m}|}\sum_{n=1}^{N_r}\frac{1}{(\alpha_{nk}^2+q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2+\bar q_{mj}^2)}\right),$$

$$S_{2m}^{N_r}=2\alpha_{mk}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\alpha_{mk}\frac{\dfrac{H_j'(\bar p_{mk}b)}{\bar p_{mk}H_j(\bar p_{mk}b)}-\dfrac{H_j'(p_{mk}b)}{p_{mk}H_j(p_{mk}b)}+\dfrac{\delta_{j1}(\bar p_{mk}^2-p_{mk}^2)}{bp_{mk}^2\bar p_{mk}^2}}{\dfrac{p_{mk}H_j'(\bar p_{mk}b)}{H_j(\bar p_{mk}b)}-\dfrac{\bar p_{mk}H_j'(p_{mk}b)}{H_j(p_{mk}b)}}-\frac{1}{|\Delta_{2,m}|}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sum_{n=1}^{N_r}\frac{1}{(\beta_{nj}^2+p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2+\bar p_{mk}^2)}\right).$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, получаем, что значения рядов стремятся снизу к единице $\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{S}_m^{N_r}=1$, т.е. ограниченные решения систем (23) имеют общий ненулевой предел:

$$\lim_{m\to\infty}y_m^l=\lim_{m\to\infty}x_m^l=K_l>0\,. \tag{24}$$

Тогда, согласно формуле замены (22), для нетривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы (14) будет верна оценка:

$$Z_{2m-1}=KD_1^{1/4}/\beta_{mj};\quad Z_{2m}=KD_2^{1/4}/\alpha_{mk}\quad (m\to\infty)\,. \tag{25}$$

Численные результаты

На основе представленной теории был разработан алгоритм вычисления собственных частот и собственных форм колебаний пластины, который был программно реализован в пакете Mathematica. В таблице №1 даны собственные частоты $\lambda=4\Omega^2$ квадратной изотропной пластины с защемленными краями под действием гидростатической нагрузки $N_x=N_y=-4N_{\mathrm{H}}$, вычисленные согласно представленному в работе подходу рядом с аналогичными результатами из [1], а также [10]. Заметим, что в [1] использовался метод возмущений для определения собственных частот. В работе [10] использовали вариационный метод для определения нижней границы собственной частоты и классический метод Рэлея - Ритца для вычисления верхней оценки. Снова можно увидеть полное соответствие всех результатов.

На основе предложенного метода были рассчитаны первые пять собственных частот квадратной ортотропной защемленной пластины при варьировании свойств материала и значений сил N_x и N_y. Данные результаты представлены в таблицах №2,3.

Таблица №1

Собственные частоты для квадратной изотропной пластины

$\frac{a^2 N_H}{\pi^2 D}$	Нижняя граница [10]	Верхняя граница [10]	[1]	Present
5	49.580	49.847	49.628	49.581
10	59.922	60.392	60.019	59.926
15	68.580	69.271	68.566	68.585
20	76.124	77.088	-	76.171
30	89.268	90.656	-	89.272
50	110.60	112.90	-	110.59
100	148.26	154.98	-	150.55
200	207.79	215.69	-	207.73

Таблица №2

Первые собственные частоты Ω для защемленной квадратной пластины: изотропный материал $D_1 = D_2; \quad D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$

n	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$, $N_y = 0$	$N_x = 0$, $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.999	2.883	2.673	2.668	2.668
2	4.284	4.191	4.038	3.865	3.865
3	5.201	5.121	4.992	4.189	4.189
4	5.735	5.662	5.545	4.992	4.992
5	5.749	5.677	5.563	5.388	5.388

Таблица №2 соответствует изотропному материалу, в то время как в таблице №3 даны собственные частоты для ортотропной пластины при

$D_1 = 3D_2$; $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$. Можно увидеть, что увеличение значений сил N_x и N_y в любой комбинации приводит к уменьшению значений собственных частот колебаний пластины.

Во всех рассмотренных случаях первая собственная частота (фундаментальная собственная частота) всегда достигается для симметричных по обеим осям мод.

Таблица №3

Первые собственные частоты Ω для защемленной квадратной пластины: ортотропный материал $D_1 = 3D_2$; $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$

n	$N_x = N_y = 0$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.2$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = \frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 0.5$	$\frac{a^2 N_x}{\pi^2 D_1} = 1$, $N_y = 0$	$N_x = 0$, $\frac{b^2 N_y}{\pi^2 D_1} = 1$
1	2.689	2.521	2.170	2.157	2.128
2	3.499	3.321	2.979	3.314	2.432
3	4.115	4.009	3.833	3.625	3.639
4	4.525	4.371	4.103	4.333	4.009
5	4.643	4.528	4.337	4.447	4.339

Выводы

Представленный метод дает возможность построения аналитического решения задачи в значительно более широком диапазоне частот и при большей вариации значений контурных нагрузок по сравнению с известными методами. На основе анализа соответствующей бесконечной системы линейных уравнений удается построить в аналитической форме асимптотику ее нетривиального решения. Проведенные численные исследования для задач колебания ортотропных пластин с защемленными краями показали хорошее совпадение с известными в литературе классическими результатами, полученными на основе энергетического подхода.

Таким образом, полученные асимптотически точные решения задач колебаний и устойчивости прямоугольных ортотропных пластин могут использоваться, как эталонные при отладке численных и численно – аналитических методов, для вычисления собственных частот и критических сил с заданной точностью в том диапазоне параметров, где энергетические методы приводят к системам высокой размерности.

Литература

1. Leissa A.W. Vibration of Plates (NASA SP-160). Washington, DC: Govement Printing office, 1969. 353 p.

2. Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчато переменной толщины и жесткости // Инженерный вестник Дона, 2013, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1516.

3. Дородов П.В. Исследование напряжений на линии сопряжения ступенчатой пластины // Инженерный вестник Дона, 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1636.

4. Xing Y.F. and Liu B. New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plate // Composite Structures, 2009, 89. P. 567-74.

5. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration, 2016, 369. P. 228 - 245.

6. Папков С.О. Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // Динамические системы. 2011, Т.1 (29), № 2, С. 255-267.

7. Papkov S.O. Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges: Analysis and Solution of an Infinite System // Acoustical Physics, 2015, Vol. 61, № 2, P. 136–143.

8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анали за, 5-е изд. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

9. Прудников А. П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981, 800 с.

10. Weinstein A. and Chien W.Z. On the vibrations of a clamped plate under tension // Quarterly Journal of Applied Mathematics, 1943, Vol. 1, pp. 61-68.

References

1. Leissa A.W. Vibration of Plates (NASA SP-160). Washington, DC: Govement Printing office; 1969, 353 p.

2. Shlyakhin D.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1516.

3. Dorodov P.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1636.

4. Xing Y.F. and Liu B. Composite Structures. 2009. 89. pp. 567-74.

5. Papkov S.O. Journal of Sound and Vibration, 2016, 369. pp. 228 - 245.

6. Papkov S.O. Dinamicheskiye sistemy. 2011. T.1 (29), № 2. pp. 255 267.

7. Papkov S.O. Acoustical Physics. 2015. Vol. 61, No. 2. pp. 136–143.

8. Kantorovich L.V., Krylov B.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate Methods of Higher Analysis] 5-e izd. M.-L.: Fizmatgiz, 1962. 708 p.

9. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integraly i ryady. Elementarnyye funktsii [Integrals and series: Elementary functions]. M.: Nauka, 1981, 800 p.

10. Weinstein A. and Chien W.Z. Quarterly Journal of Applied Mathematics, 1943, Vol. 1. pp. 61-68.