

Расчёт на жёсткость пластины, подкреплённой рёбрами, на упругом основании методом Бубнова-Галёркина

Е.Э. Кадомцева¹, А.Н. Бескопильный¹, Я.А. Бердник²

¹Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В работе рассматривается изгиб пластины на упругом основании. Пластина в плане имеет прямоугольное очертание. Материал пластины изотропный. Пластина подкреплена рёбрами жёсткости, направленными параллельно сторонам пластины. Учитывается, что рёбра жёсткости, параллельные разным сторонам, имеют разные жёсткости на изгиб и кручение. За расчётную схему принимается ортотропная пластина, имеющая различные цилиндрические жёсткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях, параллельных подкрепляющим рёбрам. Упругое основание принимается Винклеровским, т.е. считается, что реакция основания прямо пропорциональна прогибу пластины в каждой точке. За неизвестные НДС принимается прогиб пластины. Для определения прогиба используется метод Бубнова - Галёркина. Прогиб берётся в виде разложения в ряд с неизвестными коэффициентами по функциям, удовлетворяющим граничным условиям. Для определения неизвестных коэффициентов получена система линейных неоднородных алгебраических уравнений. Рассмотрен случай действия внешней нагрузки и реакции основания, передающихся на пластину через рёбра жёсткости.

Ключевые слова: Пластина, рёбра, упругое, основание, изгиб, прогиб, Бубнов-Галёркин, ортотропная, прямоугольная, распределённая нагрузка.

Расчёт различных конструкций из армированных элементов имеет широкое применение при проектировании железобетонных строительных сооружений [1-5].

Рассматривается прямоугольная пластина с рёбрами жёсткости, направленными параллельно краям пластины, нагруженная распределённой нагрузкой, перпендикулярной срединной плоскости (Рис. 1).

Пластинка рассматривается как конструктивно ортотропная. Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластинки на упругом основании имеет вид [6,7]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) - \alpha w(x, y). \quad (1)$$

где $D_1 = D + \frac{E_1 J_1}{b_1}$, $D_2 = D + \frac{E_2 J_2}{a_1}$, $D_3 = D + \frac{1}{2} \left(\frac{J_{2кр.}}{a_1} + \frac{J_{1кр.}}{b_1} \right)$,

D - Цилиндрическая жёсткость пластинки, $E_1 J_1$ и $E_2 J_2$ – жёсткость при изгибе рёбер, $J_{2кр.}$ и $J_{1кр.}$ - моменты инерции при кручении рёбер, $w(x, y)$ – прогиб пластины.

Перейдём к безразмерным переменным ξ, η следующей заменой

$\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\lambda = \frac{a}{b}$. Учитывая дифференциальные зависимости

$\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{1}{a^k} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k}$, $\frac{\partial^k}{\partial y^k} = \frac{1}{b^k} \frac{\partial^k}{\partial \eta^k}$, $\frac{\partial^k}{\partial x^m \partial y^{k-m}} = \frac{1}{a^m} \frac{1}{b^{k-m}} \frac{\partial^k}{\partial \xi^m \partial \eta^{k-m}}$, получим (1) в

следующем виде:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2D_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2 \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = a^4 [q(\xi, \eta) - \alpha w(\xi, \eta)]. \quad (2)$$

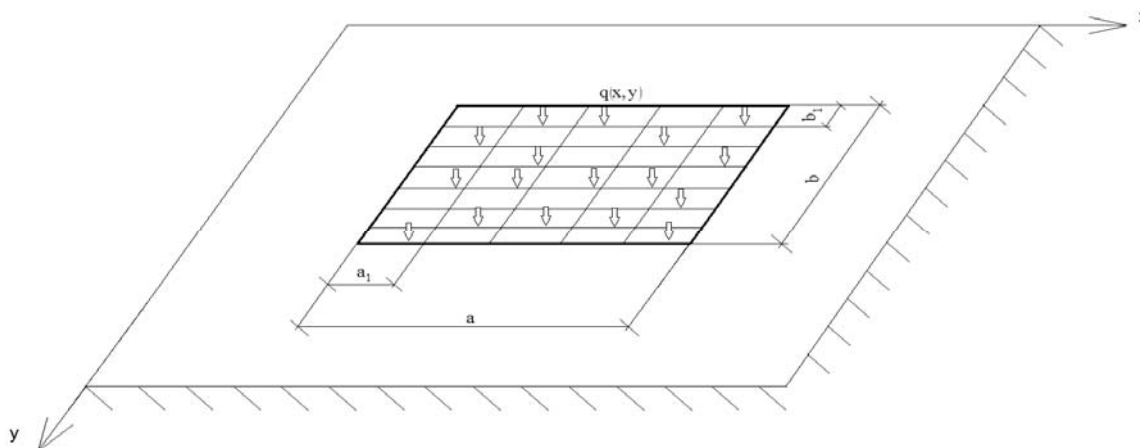


Рис.1

Решение принимается в виде двойного ряда: $w(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} w_{mn}(\xi, \eta)$, где ξ, η – безразмерные координаты, $w(\xi, \eta)$ – функция, удовлетворяющая всем граничным условиям пластинки, A_{mn} – неизвестные коэффициенты.

Функциональное уравнение метода Бубнова – Галёркина [8] для пластинки, подкреплённой рёбрами жёсткости, на упругом основании примет вид:

$$\iint_A \left\{ D_1 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2D_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2 \lambda^4 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} - \right. \\ \left. a^4 [q(\xi, \eta) - \alpha w(\xi, \eta)] \right\} w_{kl}(\xi, \eta) dA = 0. \quad k, l = 1, 2, 3, \dots$$

(3)

После подстановки $w(\xi, \eta)$ в (3) получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \iint_A \left\{ D_1 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2D_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2 \lambda^4 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} - \right. \\ \left. a^4 [q(\xi, \eta) - \alpha w_{mn}(\xi, \eta)] \right\} w_{kl}(\xi, \eta) dA = 0. \quad k, l = 1, 2, 3, \dots$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_{mn} :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{kl}^{mn} A_{mn} = q_{kl}. \quad k, l = 1, 2, 3, \dots (4)$$

$$\text{где } B_{kl}^{mn} = \iint_A \left\{ D_1 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2D_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2 \lambda^4 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} + \right. \\ \left. + a^4 \alpha w_{mn}(\xi, \eta) \right\} w_{kl}(\xi, \eta) dA, \quad q_{kl} = \iint_A q(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) dA.$$

Если распределённая нагрузка и действие упругого основания передаются на пластинку через рёбра жёсткости [9,10], то

$$q_{kl}(y) = \sum_{i=1}^{n_1} b_1 \int_0^a q(x, y) w_{kl}(x, y) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} b_1 a \int_0^1 q(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\xi,$$

$$q_{kl}(x) = \sum_{i=1}^{n_2} a_1 \int_0^b q(x, y) w_{kl}(x, y) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} b a_1 \int_0^1 q(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\eta,$$

$$q_{kl}(\xi, \eta) = q_{kl}(\xi) + q_{kl}(\eta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} b_1 a \int_0^1 q(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\xi + \sum_{i=1}^{n_2} b a_1 \int_0^1 q(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\eta,$$



$$B_{kl}^{mn} = \iint_A \left\{ D_1 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} + 2D_3 \lambda^2 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2 \lambda^4 \frac{\partial^4 w_{mn}(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} \right\} w_{kl}(\xi, \eta) dA + \\ + \sum_{i=1}^{n_1} a^4 \alpha b_1 a \int_0^1 w_{mn}(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\xi + \\ + \sum_{i=1}^{n_2} a^4 \alpha b a_1 \int_0^1 w_{mn}(\xi, \eta) w_{kl}(\xi, \eta) d\eta,$$

где a – длина ребра параллельного оси x ,

b – длина ребра параллельного оси y ,

a_1 – расстояние между ребрами параллельными оси x ,

b_1 – расстояние между ребрами параллельными оси y ,

n_1 – число рёбер параллельных оси x , n_2 – число рёбер параллельных оси y .

Определив A_{mn} из системы линейных алгебраических уравнений, найдём выражение прогиба пластинки $w(\xi, \eta)$.

Литература

1. Кадомцева Е.Э., Моргун Л.В. Учёт влияния отличия модулей упругости на сжатие и растяжение при расчёте на прочность армированных балок с заполнителем из фибропенобетона. // Инженерный вестник Дона, 2013, № 2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
2. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н. Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различных теорий прочности. // Инженерный вестник Дона, 2013, № 4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.
3. Кадомцева Е.Э. Прочность при ударе по составной балке. "Строительство 2009", Материалы юбилейной международной научно-практической

- конференции / Ростовский государственный строительный университет - Ростов-на-Дону: редакционно-издательский центр РГСУ, 2009, -С. 41.
4. Моргун В.Н., Курочка П.Н., Богатина А.Ю., Кадомцева Е.Э., Моргун Л.В. К вопросу о сцеплении стержневой арматуры с бетоном и фибробетоном. Ж. «Строительные материалы», 2014, №8. – С.56-59.
5. Моргун Л.В., Богатина А.Ю., Кадомцева Е.Э. О поведении фибропенобетона при изгибе армированных балок. Бетон и железобетон - взгляд в будущее: научные труды I Всероссийской (II Международной) конференции по бетону и ж/б (Москва, 12-16 мая 2014) в 7 т. Т.3. Арматура и системы армирования. Фибробетоны и армоцементы. Проблемы долговечности. Москва: МГСУ, 2014. – С.151-157.
6. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т.1. - М. изд-во "Наука", Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981.-832 с.
7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Под общей редакцией Биргер И.А. и Пановко Я.Г. Т.2. - М., изд-во "Машиностроение", 1988.- с.464.
8. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – М. изд-во "Физматлит", МАИК «Наука/Интерпериодика», 2007. -687 с.
9. Shukla S.K. Shallow foundations in geo synthetics and their applications. - Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163
10. Yin J.H. Comparative modeling study on reinforced beam on elastic foundation // ASCE Journ. of Geotechn. and Geoenvironmental Engineering. -2000. Vol. 126, № 3. pp. 265-271.

References

1. Kadomceva E.E., Morgun L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
-

2. E.E. Kadomceva E.E., Beskopyl'nyj A.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.
 3. Kadomceva E.E. Stroitel'stvo 2009. Materialy yubilejnoj mezhdunarodnoj nauchno- prakticheskoj konferencii. Rostovskij gosudarstvennyj stroitel'nyj universitet. Rostov-na-Donu: redakcionno-izdatel'skij centr RGSU, 2009, p. 41.
 4. Morgun V.N, Kurochka P.N., Bogatina A.U., Kadomceva E.E., Morgun L.V. Stroitel'nye materialy. Mezhdistsiplinarnyy zhurnal. 2014. №8. pp. 56-59.
 5. Morgun L.V., Bogatina A.U., Kadomceva E.E. Beton i zhelezobeton-vzglyad v budushchee: nauchnyetrudy I Vserossijskoj (P Mezhdunarodnoj) konferencii pobetonu i zh/b (Moskva, 12-16 maya 2014) v 7 t. T.3. Armatura i sistemy armirovaniya. Fibrobetony i armocementy. Problemy dolgovechnosti. [Concrete and reinforced concrete - glance at future: proceedings of I all-Russian (II International) conference on concrete and reinforced concrete (Moscow, 12-16 may 2014) 7 T. T. 3. Valves and system reinforcement. The fiber-reinforced concrete and amazement. Durability problems.] Moskva: MGSU, 2014. Pp.151-157.
 6. Filin A.P. Prikladnaya mekhanika tvyordogo deformiruemogo tela. [Applied mechanics of solid deformable body]. T.1. Moskva: izd-vo " Nauka", Gl. red. fiz.-mat. literatury, 1981. 832 p.
 7. Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik v tryohtomah. Pod obshej redakciej Birger I.A. i Panovko YA.G.. [Strength, stability, oscillations. Handbook in three volumes. Under the General editorship of Birger I. A. and Panovko YA.G.] T.2. Moskva: izd-vo " Mashinostroenie", 1988. 464 p.
 8. Myshkis A.D. Prikladnaya matematika dlya inzhenerov. Special'nye kursy. [Applied mathematics for engineers. Special courses] Moskva: izd-vo "Fizmatlit", MAIK «Nauka/Interperiodika», 2007. 687 p.
 9. Shukla S.K. Shallow foundations in geosynthetics and their applications. Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163
-



10. Yin J.H. Comparative modeling study on reinforced beam on elastic foundation
// ASCE Journ. of Geotechn. and Geoenvironmental Engineering. -2000. Vol. 126,
№ 3. pp. 265-271.