

## Исследование нелинейных волновых процессов на поверхности жидкости в электрическом поле

*Э.Н.Егерева, А.Н.Охлопков*

*ФГБОУ ВО «НИУ Московский государственный строительный университет»*

**Аннотация:** Описывается зависимость величин, характеризующих распространение нелинейных волн на поверхности жидкого проводника, от напряженности электрического поля и от длины волны. Исследованы электрогидродинамические волны, а именно рассмотрено движение капель, конвективное движение жидкости, деформация капель и пузырьков в приложенном электрическом поле, распространение поверхностных волн в линейном приближении. Составлена математическая модель распространения нелинейных волн на заряженной поверхности жидкого проводника. Построены графики зависимостей частоты колебаний волны от напряженности электрического поля и фазовой скорости от длины волны.

**Ключевые слова:** Нелинейные поверхностные волны, жидкий проводник, диэлектрическая проницаемость, фазовая скорость, напряженность магнитного поля, поверхностный заряд.

**Введение.** Поверхностные волны в средах, взаимодействующих с электрическим полем, имеют большое значение для таких природных процессов, как геофизические, метеорологические и другие. Электрическое поле, что существует вблизи поверхности Земли, взаимодействует с потоками воздуха. Этим оно оказывает огромное влияние на метеорологические процессы. В грозových облаках также возникают электрические поля, влияющие на движение потоков воздуха. Исследование волновых процессов, протекающих на поверхности жидкости в приложенном электрическом поле, показывает интерес и с точки зрения технического использования электропроводящих струй. Однако струи имеют свойство разрушаться, поэтому важно предотвратить это и создать способы их стабилизации. В работе [1] подробно разобрано исследование струйных течений. В статье [2] рассматривается численное решение задачи о распространении поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании. В статье [3] составлена и исследована математическая модель распространения волн на поверхности слоя электропроводной жидкости с

---

поверхностным электрическим зарядом, находящейся на слое пористой среды. В работе [4] исследуется распространение волн на заряженной поверхности слоя жидкого проводника, находящегося в зазоре конденсатора, создающего вертикальное электрическое поле. В статье [5] решена задача о распространении нелинейных поверхностных волн в намагничивающейся жидкости бесконечной глубины. В статье [6] Рассмотрены исследования нелинейных явлений на заряженной поверхности жидкого водорода. Показано, что возбуждение поверхности низкочастотным электрическим полем переменного тока приводит к образованию капиллярных волн в высокочастотной области, причем последние проявляют турбулентность.

**Постановка задачи.** Рассматривается распространение волн по заряженной поверхности слоя жидкого электропроводника, толщину которого устремляем в бесконечность. Плотность однородной жидкости принимаем постоянной. Жидкость граничит с атмосферой пренебрежимо малой плотности. Предполагается, что она несжимаема и однородна. В работе [7] решена задача о волнах на поверхности жидкого проводника в линейном приближении.

Система уравнений движения жидкости имеет вид [8,9,10]

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^* \nabla^*) \vec{v}^* \right] = -\nabla^* p^* + \rho \vec{g}^*; \quad \operatorname{div}^* \vec{v}^* = 0 \quad (1)$$

где  $\rho$ - плотность жидкости,  $\vec{v}^*$  - скорость,  $p^*$  - давление,  $\vec{g}^*$  - ускорение силы тяжести. Учтем отсутствие в проводнике электрического поля. В атмосфере уравнения, которые показывают наличие электрического поля имеют вид

$$\operatorname{rot}^* \vec{E}^* = 0, \quad \operatorname{div}^* \vec{D}^* = 0, \quad (2)$$

здесь  $\vec{D}^* = \varepsilon \vec{E}^*$ ,  $\varepsilon = \text{const}$  - диэлектрическая проницаемость среды.

На границах раздела поверхностных сред имеем: [9,10]

$$v_n^* - V_n^* = 0, \vec{E}_\tau^* = \vec{E}^* - \vec{n}E_n^* = 0, D_n^* = 4\pi\sigma^*, \quad (3)$$

$$p_{ij}^* n_i n_j + p^* = -\alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), p_{ij}^* = -p_{атм}^* \delta_{ij} + \frac{\varepsilon E_i^* E_j^*}{4\pi} - \frac{\varepsilon E^{*2}}{8\pi} \delta_{ij},$$

где  $\sigma^*$  - поверхностная плотность электрического заряда,  $p_{атм}^*$  - давление в атмосфере. Для скорости жидкости существует кинематическое условие. Оно состоит в том, что в связи с непрерывностью движения, частица, которая находится на поверхности, будет все время оставаться на ней. Тогда нормальная компонента скорости  $v_n$  должна быть равна нормальной скорости движения поверхности  $V_n$ .  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ;  $R_1, R_2$  - главные радиусы кривизны;  $\alpha$  - коэффициент поверхностного натяжения;  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали, направленный из области 1 в 2.

Обезразмериваем переменные и величины данной математической модели [11,9,10]

$$x = k(x^* - ct^*), z = kz^*, \xi = \frac{\xi^* k}{\delta}, \vec{v} = \frac{\vec{v}^*}{c\delta}, \vec{E} = \frac{\vec{E}_w^*}{\delta E_0^*}, \varphi = \frac{k\varphi_w^*}{\delta E_0^*}, \quad (4)$$

$$p = \frac{p_w^*}{\delta \rho c^2} = \frac{p^* - p_0^*}{\delta \rho c^2}, p_0^* = -\rho g z^* + p_{атм}^* - \frac{\varepsilon E_0^{*2}}{8\pi},$$

где  $k=2\pi/\lambda$  - волновое число,  $\lambda$  - длина волны  $E_0^* = |\vec{E}_0^*|$ , где  $p_0^* = const (z^* = 0)$ . При  $z^* \neq 0$  к  $p_0^*$  надо прибавить гидростатическое давление, равное  $-\rho g z^*$ , выражение которого следует из уравнения (1) при  $\vec{v} = 0: -dp_0^*/dz^* - \rho g = 0$ . Отсюда находим  $p_0^* = -\rho g z^* + const$ . Выражение  $p_0^*$  отмечает, что электрическое поле образует на заряженной поверхности проводника «отрицательное давление». Оно направлено к его поверхности по внешней нормали, так как знак перед  $\varepsilon E_0^{*2}/8\pi$  противоположен знаку

перед  $p^*_{атм}$ . Для искривленной поверхности отрицательное давление равно  $-\varepsilon E_n^{*2} / 8\pi$ .

Плотность поверхностного заряда в безразмерном виде запишем:  $\sigma = \sigma_w^* / \delta\sigma_0^* = 4\pi\sigma_w / \delta\varepsilon E_{0z}$  и получаем

$$\sigma = E_z - \delta E_x \frac{d\xi}{dx} - \frac{\delta e_z}{2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 - \frac{\delta^2}{2} E_z \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \quad (5)$$

Безразмерные условия на бесконечности

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \vec{v} = 0; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \vec{E} = 0 \quad (6)$$

Учитывается то, что волна при движении является периодичной и симметричной относительно вертикали, которая проходит через вершину волны, и то, что  $x^*$  лежит на невозмущенной поверхности жидкости [7,14,15]

$$\xi(x + 2\pi) = \xi(x); \quad \xi(-x) = \xi(x); \quad \int_0^{2\pi} \xi(x) dx = 0 \quad (7)$$

Рассматривается математическая модель нелинейной краевой задачи для нахождения величин  $\vec{v}, p, \varphi, \vec{E}, \xi, \sigma$  из уравнения (5) с учетом граничных условий (6) и ограничений (7).

Переходим к исследованию нелинейной задачи (5)-(7). Решение задачи ищем в форме рядов по малому параметру [8,14,15]

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \xi_k; \quad \vec{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \vec{v}_k; \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p_k, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \varphi_k; \quad \vec{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \vec{E}_k; \quad (8)$$
$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_k, \quad v = v_n \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \theta_k \right]^{-1}.$$

Для перенесения граничных условий с поверхности  $z = \delta\xi(x)$  на поверхность  $z=0$ , необходимо разложить величины в ряды Тейлора в окрестности  $z=0$ .

**Исследование волнового движения жидкости.** Выражение для фазовой скорости имеет вид [14,15]:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \sigma_C - \varepsilon\sigma_e \left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\theta_2\right)},$$

где

$$\frac{\theta_2}{2} = \frac{3\Pi_C}{8(1-2\Pi_C)} - \frac{3}{16} - \frac{1}{16} \left( \frac{18\Pi_C + 18\Pi_C^2}{1-2\Pi_C} + 2\Pi_C + 5 \right) \Big/ \{1 - \Pi_E + \Pi_C\} +$$

$$+ \frac{\Pi_E}{64} \left( \frac{15\Pi_C}{1-2\Pi_C} + \frac{11}{2} \right) \Big/ \{1 - \Pi_E + \Pi_C\}.$$

Здесь введем безразмерные параметры  $\Pi_C$ ,  $\Pi_E$ , которые сравнивают величины капиллярных и электрических сил с гравитационными силами

$$\Pi_C = \frac{\sigma_C k}{g} = \frac{\alpha k^2}{\rho g}; \quad \Pi_E = \frac{\varepsilon\sigma_e k}{g} = \frac{\varepsilon k E_0^{*2}}{4g\pi\rho}.$$

Дисперсионное уравнение, которое представляет связь частоты  $\omega = ck$  с волновым числом, следующее

$$\omega = \sqrt{gk + \sigma_C k^2 - \varepsilon\sigma_e k^2 \left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\theta_2\right)}.$$

Фазовую скорость и частоту волны рассчитаем для жидкого натрия при температуре 249 °С, когда плотность его соответствует значению  $\rho = 0,89$  г/см<sup>3</sup>, а также  $\alpha=200$  дин/см, а  $g=981$  г/см<sup>2</sup>.

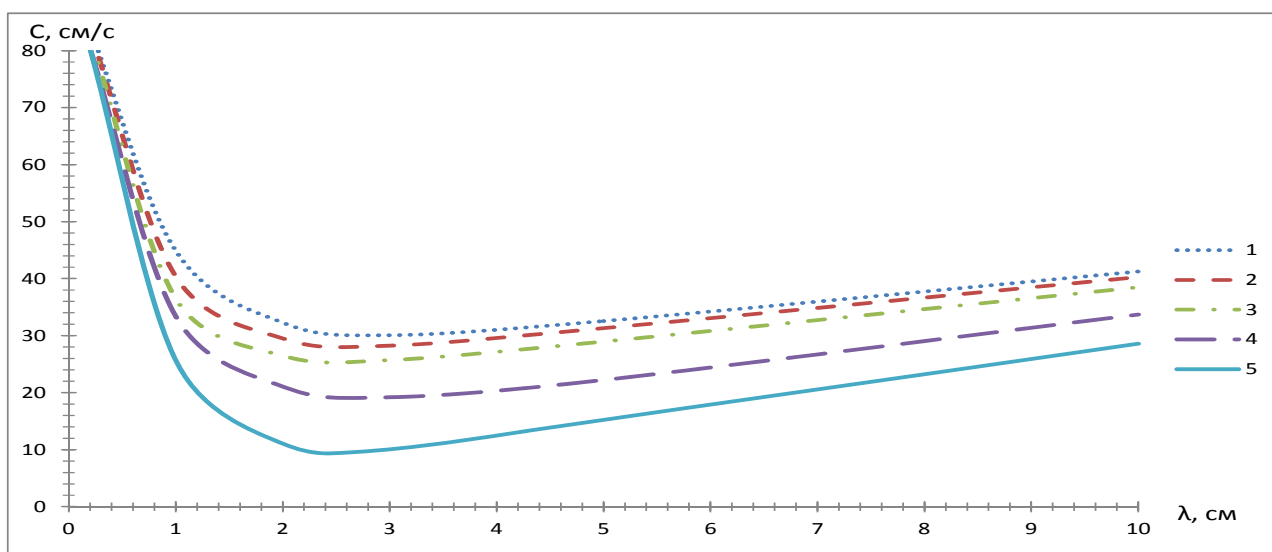


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости от длины волны при  $\delta=0$

На Рис.1 показана зависимость фазовой скорости  $c$  от длины волны  $\lambda$  при постоянном значении малого параметра ( $\delta=0$ ). Цифрами 1, 2, 3, 4 и 5 обозначены изменения фазовой скорости при величине напряженности электрического поля  $E_0^*=0, 35, 55, 85$  и  $95$  SGSE масштаба. По графику видно, что наименьшее значение фазовой скорости достигается при наибольшем  $E_0^*$ , когда зафиксировано  $\lambda$ . При дальнейшем увеличении длины волны фазовая скорость также увеличивается.

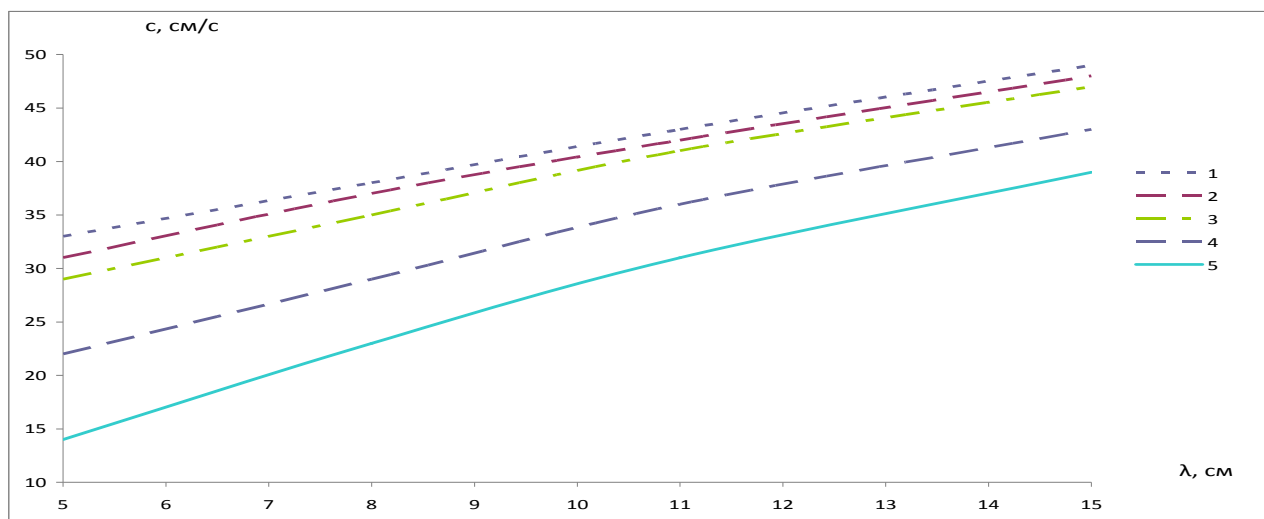


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от длины волны при  $\delta=0,1$ .

На Рис.2 показана зависимость фазовой скорости от длины волны  $\lambda$  при  $\delta=0,1$ . Цифрами 1, 2, 3, 4 и 5 показаны кривые при величине напряженности электрического поля  $E_0^*=0, 35, 55, 85$  и  $95$  SGSE масштаба. Из графика видно, что фазовая скорость быстрее возрастает с увеличением  $\lambda$  при большем значении  $E_0^*$ .

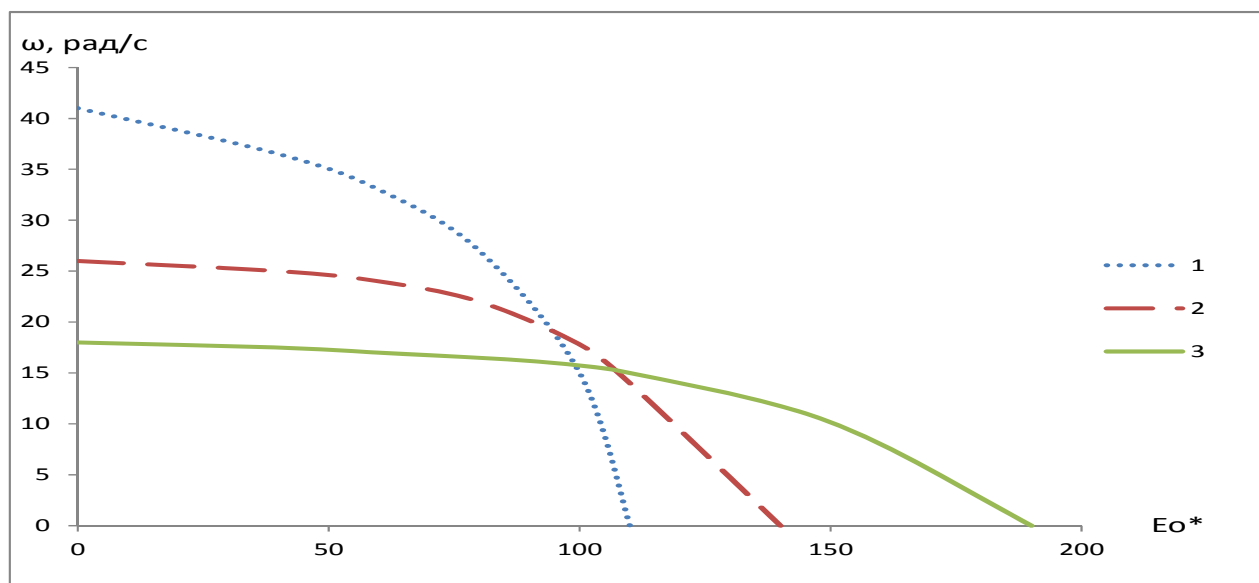


Рис.3. Связь частоты волны и напряженности электрического поля при  $\delta=0$

На Рис.3 составлена связь частоты волны с напряженностью электрического поля при постоянном значении малого параметра  $\delta=0$ . Исследуя график, можно сделать вывод о том, что для каждой величины  $\lambda$  существует такое значение  $E_0^*$ , при котором  $\omega=0$ , и чем меньше  $\lambda$ , тем круче он опускается с ростом  $E_0^*$ .

На Рис.4 составлена зависимость частоты волны от напряженности электрического поля, при  $\delta=0$  и разных  $\lambda$ , от напряженности электрического поля. Из графиков 3 и 4 можно сделать вывод, что в электрическом поле частота волны уменьшается.

Установлено, что при распространении волн на заряженной поверхности жидкого проводника с ростом электрического поля скорость и частота волны уменьшаются. Причем, для каждой длины волны существует такая напряженность электрического поля, при которой  $\omega=0$ .

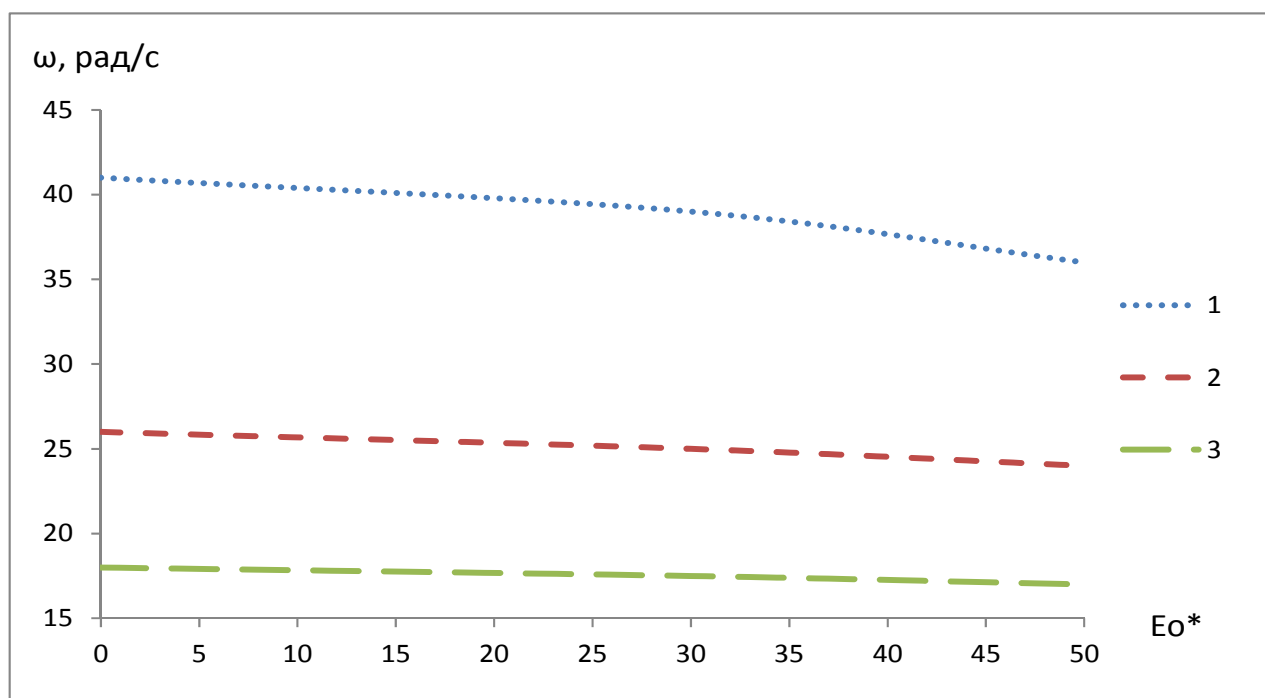


Рис.4. Связь частоты волны с напряженностью электрического поля.

### Литература

1. Taylor G. Electrically driven jets//Proc. Roy. Soc. Lond. – 1969 – №3, pp. 453–475
2. Егерова Э.Н., Идиятов Р.А. Исследование частоты колебаний волны в слое жидкости на пористом основании // Инженерный вестник Дона. 2018. №2. [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4871](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4871)
3. Тактаров Н.Г., Миронова С.М. Моделирование поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4, С. 1163.
4. Тактаров Н.Г., Егерова Э.Н. Поверхностные гравитационные электрокапиллярные волны на слое жидкого проводника // Современные наукоемкие технологии № 5, 2004. С. 10–15.
5. Егерова Э.Н., Зотова Ю.С., Пьянзина А.Е. Исследование нелинейных волн на поверхности намагничивающейся жидкости бесконечной глубины //





Инженерный вестник Дона. 2018. №2.  
ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4873

6. Kolmakov G.V., Brazhnikov M.YU. Nonstationary nonlinear phenomena on the charged surface of liquid hydrogen // JOURNAL OF LOW TEMPERATURE PHYSICS. 2006. №1-4. pp. 311-335.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // Наука. – 1982. – 624 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика // Наука. – 1986. – 735 с.
9. Извекова Т.А. Математическое моделирование электрогидродинамических поверхностных волн: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Саранск, 1998. 17 с.
10. Тактаров Н.Г. Поверхностные гравитационные электрокапиллярные волны // Успехи современного естествознания. 2004. №6. С. 16-20.
11. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Математическое моделирование магнитогиродинамических поверхностных волн. // Издательство Мордовского университета - 1991 – С. 96
12. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: ГИМФД – 1959 – 700 с.
13. Мелчер Дж. Электрогидродинамика // Магнитная гидродинамика – 1974, №2 – С. 3–30
14. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. //Издательство Ленинградского университета – 1981 – 196 с.
15. Алешков Ю.З. О распространении нелинейных магнитогиродинамических поверхностных волн // Магнитная гидродинамика – 1989- №4 – С.79-86

### References

1. Taylor G. Proc. Roy. Soc. Lond. 1969 №3 pp. 453-475
-



2. Egereva E`N, Idiyatov R.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2018. №2  
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4871
  3. Taktarov N.G., Mironova S.M. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im.  
N.I. Lobachevskogo, 2011, №4, P. 1163.
  4. Taktarov N.G., Egereva E`N. Sovremenny`e naukoemkie texnologii № 5,  
2004. pp. 10-15
  5. Egereva E`N, Zotova Yu.S., P`yanzina A.E. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus).  
2018. №2. ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4873
  6. Kolmakov G.V., Brazhnikov M.YU. Journal of low temperature physics.  
2006. №1-4. pp. 311-335.
  7. Landau L.D., Lifshicz E.M. E`lektrodinamika sploshny`x sred  
[Continuum electrodynamics]. Nauka, 1982. 624 p.
  8. Landau L.D., Lifshicz E.M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Nauka, 1986.  
735 p.
  9. Izvekova T.A. Matematicheskoe modelirovanie e`lektrogidrodnamicheskix  
poverxnostny`x voln [Mathematical modeling of electrohydrodynamic surface  
waves]: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18. Saransk, 1998. 17 p.
  10. Taktarov N.G. Uspexi sovremennogo estestvoznaniya. 2004. №6. pp. 16-20.
  11. Barinov V.A., Taktarov N.G. Matematicheskoe modelirovanie  
magnitogidrodnamicheskix poverxnostny`x voln. Izdatel`stvo Mordovskogo  
universiteta, 1991. p. 96
  12. Levich V.G. Fiziko-ximicheskaya gidrodinamika [Physico-chemical  
hydrodynamics]. M.: GIMFD. 1959. 700 p.
  13. Melcher Dzh. E`lektrogidrodinamika. Magnitnaya gidrodinamika. 1974.  
№2 – pp. 3–30
  14. Aleshkov Yu.Z. Teoriya voln na poverxnosti tyazhelej zhidkosti [Theory of  
waves on the surface of a heavy liquid] Yu.Z.AleshkovIzdatel`stvo  
Leningradskogo universiteta. 1981. 196 p.
-



15. Aleshkov Yu.Z. O rasprostraneniі nelinejny`x magnitogidrodinamicheskix poverxnostny`x volnMagnitnaya gidrodinamika. 1989. №4 pp.79-86