

Расчёт на прочность пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости, на упругом основании обратным методом

Е.Э. Кадомцева, Н.В. Сикачёва, Ю.А. Курсанов

Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Аннотация: В работе рассматривается изгиб пластины на упругом основании. Пластина в плане имеет прямоугольное очертание. Материал пластины изотропный. Пластина подкреплена рёбрами жёсткости, направленными параллельно сторонам пластины. Учитывается, что рёбра жёсткости, параллельные разным сторонам, имеют разные жёсткости на изгиб и кручение. За расчётную схему принимается ортотропная пластина, имеющая различные цилиндрические жёсткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях, параллельных подкрепляющим рёбрам. Упругое основание принимается Винклеровским, т.е. считается, что реакция основания прямо пропорциональна прогибу пластины в каждой точке. Пластина опирается на упругое основание и нагружена распределённой нагрузкой

по следующему закону $q = q_0 * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b}$. Задача решается обратным методом.

Функция прогибов пластины задаются в виде: $w = C * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b}$. Исследуется напряженное состояние и проводится расчет на грузоподъемность для различных параметров пластины и основания.

Ключевые слова: рёбра, пластина, упругое основание, обратный метод, тонкая, ортонормированная, изгиб, грузоподъёмность, прочность.

Расчёт различных конструкций из армированных элементов имеет широкое применение при проектировании железобетонных строительных сооружений.

Рассматривается прямоугольная пластина с рёбрами жёсткости, направленными параллельно краям пластины, нагруженная распределённой нагрузкой, перпендикулярной срединной плоскости (Рис. 1).

Проводилось исследование напряженного состояния и расчет на грузоподъемность для различных параметров пластины и основания. Выбор модели основания Винклера обусловлен тем, что винклеровская модель математически проста и дает достаточно хорошие результаты.

За расчётную схему принимается ортотропная шарнирно опёртая пластина, имеющая различные цилиндрические жёсткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях, зависящих от жёсткости подкрепляющих рёбер [5 – 6].

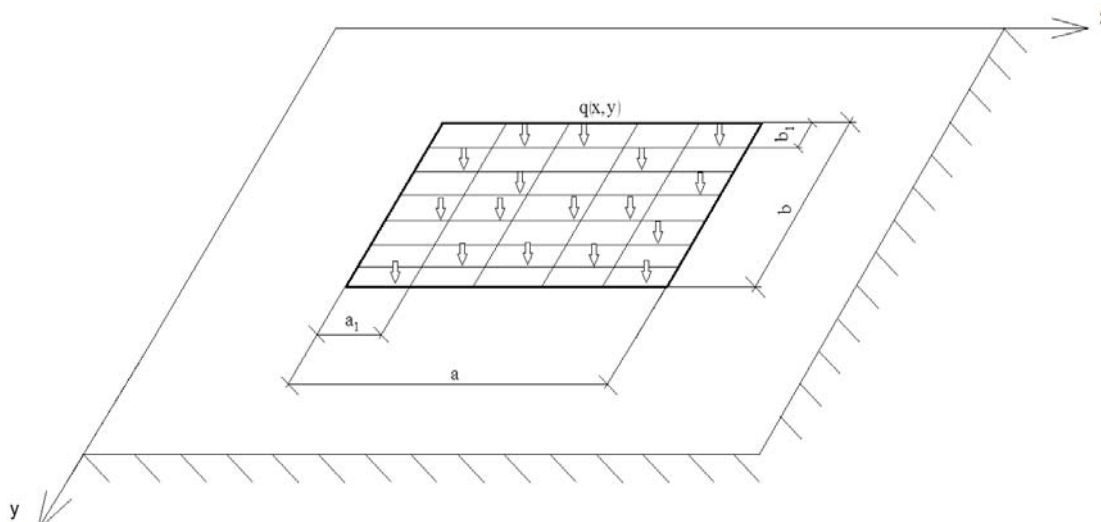


Рис. 1. Пластина, подкреплённая рёбрами жёсткости. b – ширина пластины; a – длина пластины.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины на упругом основании в этом случае имеет вид [7-11]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Kw = q(x, y) \quad (1)$$

$$\text{где } D_1 = D + \frac{E_1 J_1}{b_1} \quad (2)$$

$$D_2 = D + \frac{E_2 J_2}{a_1} \quad (3)$$

$$D_3 = D + \frac{1}{2} \left(\frac{J_{2кр}}{a_1} + \frac{J_{1кр}}{b_1} \right), \quad (4)$$

D - Цилиндрическая жёсткость пластинки, $E_1 J_1$ и $E_2 J_2$ – жёсткость при изгибе рёбер, $J_{2кр}$ и $J_{1кр}$ - моменты инерции при кручении рёбер, K – ко-

эффицент постели, $q(x, y)$ - распределённая нагрузка, w - прогиб пластины, h - толщина пластины, ν - коэффициент Пуассона.

Нагрузка, действующая на пластину, распределена по закону:

$$q = q_0 * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (5)$$

Функция прогибов пластины задаются в следующем виде:

$$w = C * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (6)$$

Постоянная C определяется из уравнения (1):

$$C = \frac{q_0}{D_1 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 + 2D_2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + K}$$

Максимальные нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{x\max} = \frac{6M_{x\max}}{h^2} = \frac{6}{h^2} \max \left| D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right|,$$

$$\sigma_{y\max} = \frac{6M_{y\max}}{h^2} = \frac{6}{h^2} \max \left| D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем q_0 .

Как видно из результатов расчетов, что оптимальным подкреплением пластины рёбрами жёсткости, является 2 горизонтальных и 2 вертикальных ребра.

Таблица № 1

Грузоподъемность пластины в зависимости от количества рёбер жёсткости

| Вертикальные рёбра, шт | Горизонтальные рёбра, шт | Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа | Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа |
|------------------------|--------------------------|---|---|---|---|
| 2 | 2 | $0,53q_0$ | 301,88 | $0,21q_0$ | 762 |
| 3 | 3 | $0,6q_0$ | 266,67 | $0,25q_0$ | 640 |
| 2 | 3 | $0,53q_0$ | 301,88 | $0,33q_0$ | 485 |
| 3 | 2 | $0,6q_0$ | 266,67 | $0,18q_0$ | 888,88 |
| - | 2 | $0,53q_0$ | 301,88 | $0,14q_0$ | 1143 |
| 2 | - | $0,44q_0$ | 363,63 | 0,25 | 640 |



Диаграмма 1.

Как видно из результатов расчетов, что оптимальным подкреплением пластины рёбрами жёсткости, является 2 горизонтальных и 2 вертикальных ребра.

Таблица № 2

Грузоподъемность пластины в зависимости от толщины пластины.

| Толщина пластины h , м | Количество рёбер жёсткости | Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа | Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа |
|--------------------------|---|---|---|---|---|
| 0,001 | 3 вертикальных и 3 горизонтальных ребра жёсткости | $1,97q_0$ | 81,2 | $0,79q_0$ | 202,53 |
| 0,0015 | | $0,94q_0$ | 170 | $0,38q_0$ | 421,1 |
| 0,002 | | $0,6q_0$ | 266,67 | $0,25q_0$ | 640 |
| 0,0025 | | $0,42q_0$ | 380,9 | $0,17q_0$ | 941,2 |
| 0,003 | | $0,32q_0$ | 516 | $0,13q_0$ | 1230,77 |



Диаграмма 2.

Вывод: чем больше толщина пластины, тем больше предельно до-
 пускаемая нагрузка по оси x и больше по оси y .

Таблица № 3

Грузоподъемность пластины в зависимости от коэффициента постели упру-
 гого основания

| Коэффици- ент постели основания K , Мпа/м | Количе- ство рё- бер жё- сткости | Тол- щина пласт- ины h , м | Макси- мальное нормальное напряжение σ_x^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа | Макси- мальное нормальное напряжение σ_y^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа |
|---|---|--|---|--|---|--|
| 100 (песок) | 3 верти- кальных и 3 гори- зонталь- ных реб- ра жёст- кости | 0,002 | $0,476q_0$ | 336,13 | $0,19q_0$ | 842,1 |
| 200 (грунт песчано- глинистый, уплотнен- ный) | | | $0,4283q_0$ | 373,56 | $0,173q_0$ | 924,8 |
| 400 (извест- няк) | | | $0,6q_0$ | 266,67 | $0,25q_0$ | 640 |
| 600 (бутовая кладка) | | | $0,3q_0$ | 533,33 | $0,12q_0$ | 1333,33 |
| 800 (бетон) | | | $0,26q_0$ | 615 | $0,1q_0$ | 1600 |

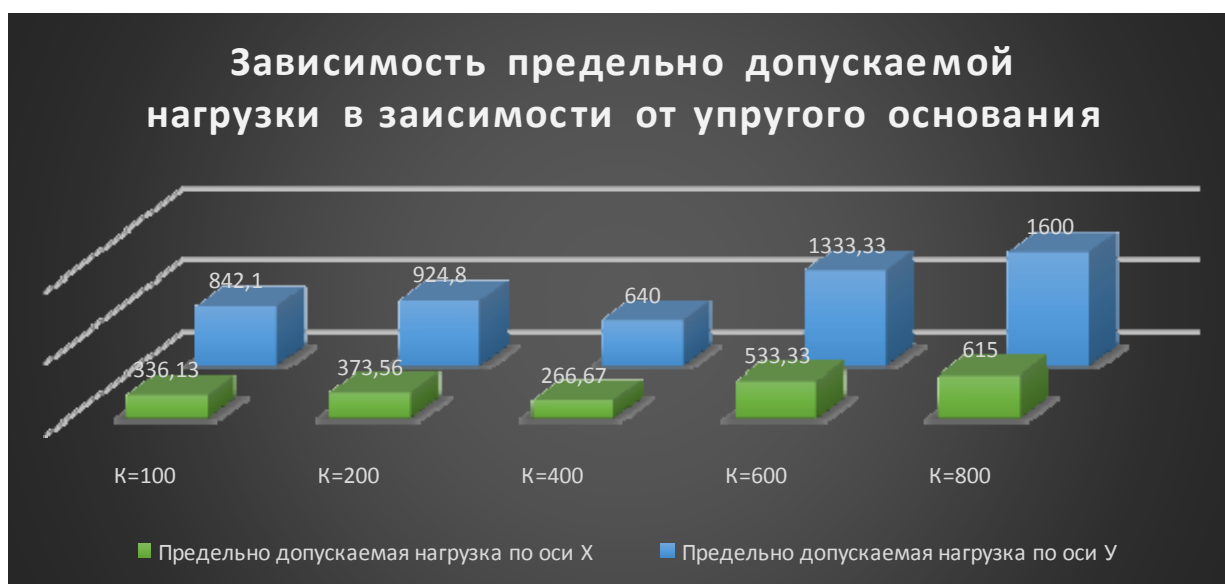


Диаграмма 3 – K – коэффициент постели.

Вывод: из расчетов видно, что между коэффициентом жесткости упругого основания и предельно допустимой нагрузкой по оси x и y , прямо пропорциональная зависимость.

В ходе исследования был проведен сравнительный анализ предельно допустимой нагрузки для пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости и прямоугольной плоской пластины. Результаты расчетов показали, что выгоднее использовать пластину, подкреплённую рёбрами жёсткости.

Таблица № 4

Результаты расчетов прямой прямоугольной и пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости

| | Толщина пластины, h м | Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа (расчёт по σ_x^{max}) | Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max} | Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа (расчёт по σ_y^{max}) |
|---|-------------------------|---|--|---|--|
| Плоская пластина | 0,002 | $0,177q_0$ | 903,95 | $71,4q_0$ | 2,24 |
| Пластина, подкреплённая рёбрами жёсткости | | $0,6q_0$ | 266,67 | $0,25q_0$ | 640 |

Вывод: исследование показало, что грузоподъёмность пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости выше, чем прямоугольной. Несмотря на то, что предельно допустимая нагрузка по оси x намного больше у прямой пластины, предельно допустимая нагрузка по оси y в 285,7 раз в прямой пластине меньше, чем в пластине, подкреплённой рёбрами жёсткости.

Исследование показало, что напряженное состояние и грузоподъёмность пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости на упругом основании, во многом зависит от количества и расположения рёбер жёсткости, геомет-

рических параметров пластины и от жесткости основания, на которое опирается сама пластина.

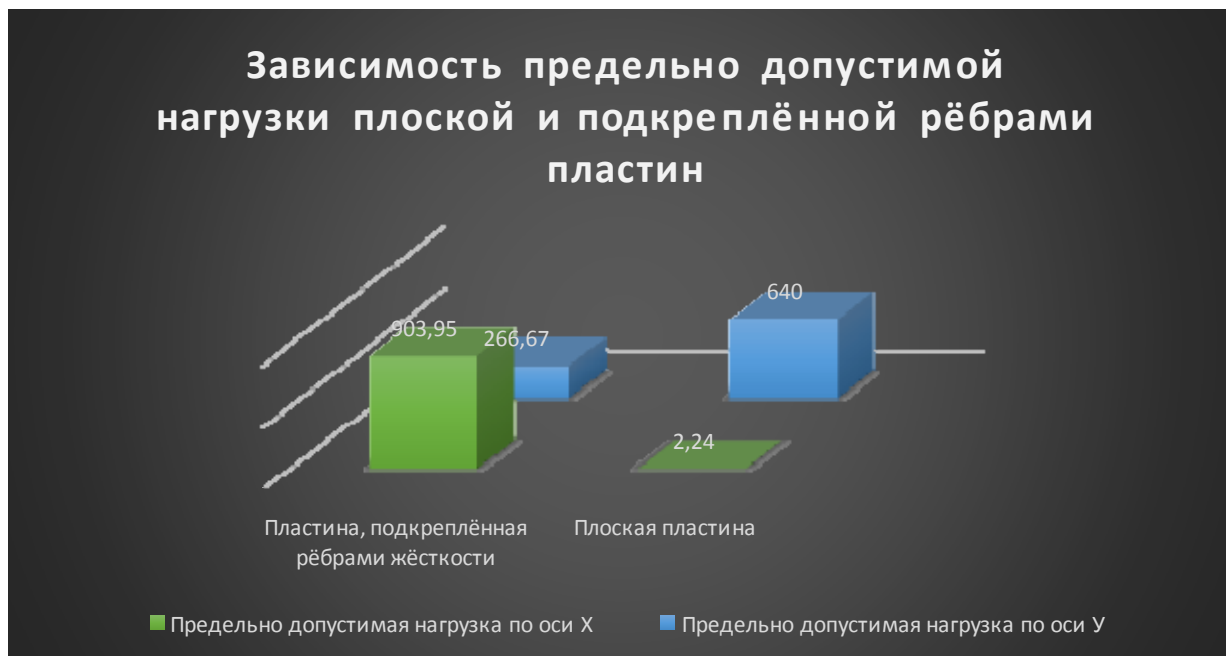


Диаграмма 4. q_0 - Предельно допустимая нагрузка(МПа).

Данный метод позволяет исследовать влияние параметров пластины, рёбер и характеристик упругого основания на прочность пластины, подкреплённой ребрами жёсткости на упругом основании при изгибе и востребован при расчёте элементов инженерных конструкций [12-14].

Литература

1. Кадомцева Е.Э., Моргун Л.В. Учёт влияния отличия модулей упругости на сжатие и растяжение при расчёте на прочность армированных балок с заполнителем из фибропенобетона. // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
2. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н. Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различ-



ных теорий прочности. // Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.

3. Матвеев С.А., Мартынов Е.А., Литвинов Н.Н. Расчёт армированной дорожной одежды как многослойной плиты на упругом основании. // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Сер.: Механика. 2015. Вып.4(45) с. 72-76.

4. Большаков А.А. Прямоугольная пластина, упруго опертая по контуру // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2011. Вып. 4 (19). URL: vestnik.vgasu.ru

5. Belen'kii D.M., Beskopyl'nyi A.N., Vernezi N.L., Shamraev L.G. New approach to the strength analysis of a welded butt joint. Industrial Laboratory. 1996. V., С. 62. №8. pp. 517-520.

6. Беленький Д.М., Бескопыльный А.Н. Измерение вектора механических свойств материала деталей машин. Вестник машиностроения. 1997. № 8. С. 44.

7. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н., Бердник Я.А. Расчёт на жёсткость пластины, подкреплённой рёбрами, на упругом основании методом Бубнова-Галёркина. // Инженерный вестник Дона, 2016, №3 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2016/3699/

8. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т.1. - М. изд-во "Наука", Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. -832 с.

9. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М. Высшая школа 1987. - 576 с.

10. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Под общей редакцией Биргер И.А. и Пановко Я.Г. Т.2. - М., изд-во "Машиностроение", 1988. - с.464.

11. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – М. изд-во "Физматлит", МАИК «Наука/Интерпериодика», 2007. -687 с.

12. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. -494 с.
13. Shukla S.K. Shallow foundations in geosynthetics and their applications. - Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163
14. Yin J.H. Comparative modeling study on reinforced beam on elastic foundation. In Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol.126, No.3., pp.265-271.
15. Кадомцева Е.Э., Кирсанов Ю.А., Сикачѳва Н.В. Расчѳт на прочность гофрированной тонкой пластины на упругом основании обратным методом. // Инженерный вестник Дона, 2017, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4251

References

1. Kadomceva E.E., Morgun L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
2. Kadomceva E.E., Beskopyl'nyj A.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.
3. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov N.N. Vestnik Sibirskoj gosudarstvennoj avtomobil'no-dorozhnoj akademii. Ser.: Mehanika. 2015. Vyp.4(45)pp. 72.76.
4. Bol'shakov A.A. Internet-vestnik VolgGASU. Ser.: Politematicheskaja. 2011. Vyp. 4 (19). URL. vestnik.vgasu.ru
5. Belen'kii D.M., Beskopyl'nyi A.N., Vernezi N.L., Shamraev L.G. Industrial Laboratory. 1996. V. 62. № 8. pp. 517-520.
6. Belen'kij D.M., Beskopyl'nyj A.N. Vestnik mashinostroeniija. 1997. № 8. p. 44.
7. Kadomceva E.Je., Beskopyl'nyj A.N., Berdnik Ja.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2016/3699/.



8. Filin A.P. Prikladnaja mehanika tvjordogo deformiruemogo tela. [Applied mechanics of a rigid deformable body.] V.1. M. izd.vo" Nauka", Gl. red.fiz.mat. literatury, 1981p. 832.
9. Simvulidi I.A. Raschet inzhenernyh konstrukcij nauprugom osnovanii. [Calculation of engineering structures on an elastic foundation]M. Vysshajashkola. 1987. p.576.
10. Prochnost', ustojchivost', kolebanija. Spravochnik v trjohtomah. Pod obshhredakciej Birger I.A. I Panovko Ja.G. [Strength, stability, vibrations. Reference book in three volumes]. V.2. M., izd-vo" Mashinostroenie", 1988. p.464.
11. Myshkis A.D. Prikladnaja matematika dlja inzhenerov. Special'nye kursy. [Applied mathematics for engineers. Special courses.] M. izd.vo "Fizmatlit", MAIK «Nauka. Interperiodika», 2007 p. 687.
12. Benerdzhi P., Batterfild R. Metod granichnyh jelementov v prikladnyh naukah.: Per. s ang. [Method of boundary elements in applied sciences: Trans. with eng.]M.: Mir, 1984. 494 p.
13. Shukla S.K. Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163
14. Yin J.H. In Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol.126, No.3, pp.265-271.
15. Kadomceva E.E., Kirsanov Y.A., Sikachoyva N.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4251