
Решение задачи строительной механики по расчету трехшарнирной, вертикально нагруженной арки параболического абриса в вычислительной среде Mathcad

Г.Ю. Орешин, А.Н. Начарова

Московский государственный строительный университет, г.Москва.

Аннотация: В статье представлено теоретическое описание и порядок расчета трехшарнирной арки параболического абриса. Подробно изложена методика создания универсальной программы в вычислительном комплексе Mathcad для различных вариантов вертикальной нагрузки. Предложена методика автоматизированного создания эпюр внутренних силовых факторов арочной конструкции. Дано подробное описание и анализ расчетной схемы.

Ключевые слова: трехшарнирная арка, статически определимые арки, арочные конструкции, параболический абрис, эпюры внутренних силовых факторов.

Еще в стародавние времена конструкции арок привлекали внимание человечества естественностью происхождения. Природно-сотворенные арочные абрисы можно было увидеть в сводах скальных пещер и ледников. В древнем Риме использование арок было практически возведено в культ. Примером подобных культовых строений могут служить дошедшие до нашего времени различные триумфальные арки. Рим так же пересекало несколько гигантских аркад-акведуков, обеспечивавших снабжение населенного пункта водой из горных источников [1](рис.1).



Рис.1 Римский акведук.

Главным конструктивным назначением арок является создание несущих конструкций покрытий зданий и пролетов мостовых сооружений. Характерной особенностью арок является наличие наклонных реакций опор от вертикальной нагрузки. Результатом разложения этих реакций на горизонтальную и вертикальную составляющую является неизбежное возникновение распора, т.е. горизонтальной составляющей реакции опор.

С точки зрения строительной механики арочные конструкции могут представлять, как статически определимые, так и статически неопределимые конструктивные схемы. В данной статье будет рассмотрен расчет статически определимой трехшарнирной арки параболического абриса. Рассмотрим теоретическую часть расчета трехшарнирной арки, представленной на рис.2.

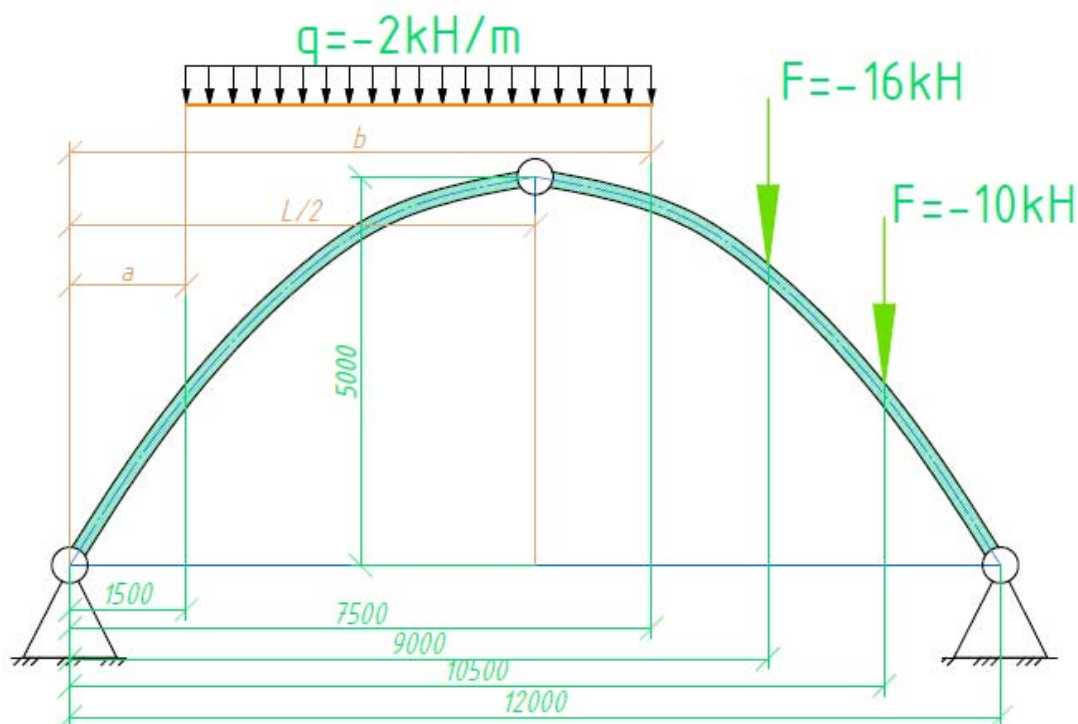


Рис.2 Расчетная схема трехшарнирной, вертикально нагруженной арки.

Трехшарнирной аркой называется плоская система, состоящая из двух криволинейных стержней, соединённых между собой и основанием-

(“землей”), помощью трех шарниров. Шарниры не должны лежать на одной прямой. Ось арки задается функцией $y = f(x)$ в декартовой системе координат, связанной началом отсчета с левой опорой арки. Ось арки представляет собой квадратную параболу и задается функцией:

$$y = 4f \frac{x(L-x)}{L^2};$$

тангенс угла наклона касательной к оси арки определяется функцией:

$$tg\varphi = 4f \frac{(l-2x)}{L^2}$$

В случае если абрис арки представляет собой синусоиду, то аналогичные параметры определяются следующими зависимостями:

$$y = f \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad tg\varphi = \frac{\pi f}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad [2,3,4].$$

Как следует из схемы, представленной на рис.2, трехшарнирная арка имеет пролет $L=12000$ мм и стрелу подъема $f=5000$ мм.

Расчет целесообразно арки в следующем порядке:

1. Кинематический анализ расчетной схемы конструкции арки.

Кинематический анализ включает в себя два этапа- количественный анализ и качественный анализ.

Проведем количественный анализ схемы для проверки условия геометрической неизменяемости конструкции. Анализ проведем по методике Чебышева: $W=3Д+2У-3П-2Ш-С-3$, где

Д-количество простых “дисков”;

У-количество узлов, т.е. точек, присоединяющихся к расчетной схеме с помощью кинематических связей;

П- количество простых припаяк;

Ш- количество простых шарниров;

С- количество простых кинематических связей (стержней); [4,5] .

Если после выполнения расчета $W > 0$, то расчетная схема конструкции является геометрически изменяемой; если $W = 0$, то выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости расчетной схемы; Если $W < 0$, система является статически неопределимой, т.е. система имеет лишние связи. При необходимости следует внести соответствующие изменения в расчетную схему для преобразования ее на геометрически неизменяемую и статически определимую, добавляя или удаляя необходимое количество связей [2,5,6].

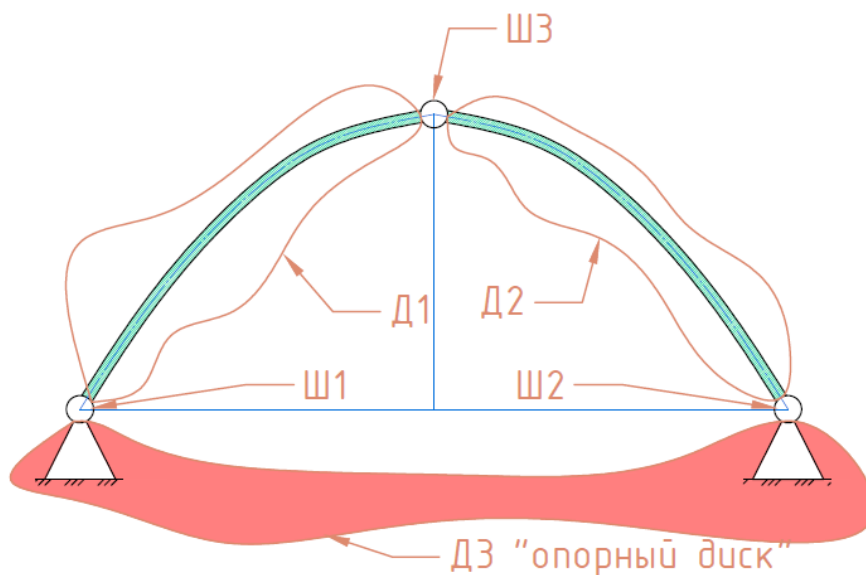


Рис.3 Кинематический анализ арки.

В представленной на рис.3 схеме имеем $D=3$, $Y=0$, $P=0$, $Ш=3$, $C=0$.

Согласно формулы Чебышева имеем: $W = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 - 0 - 3 = 0$

В качестве промежуточного вывода можно сказать, что выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости. Таким образом расчетная схема может быть геометрически неизменяема.

Далее проведем качественный анализ геометрической неизменяемости с помощью построения монтажных схем. Три диска связаны между собой

шарнирами. $\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} \rightarrow$ Способ шарнирного треугольника, три шарнира не лежат на одной прямой [5,6].

Расчетная схема представленной трехшарнирной арки является геометрически неизменяемой и статически определимой.

2. Статический расчет трехшарнирной арки.

Для определения вертикальных опорных реакций достаточно составить обычные уравнения равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно опорных точек. Таким образом расчет опорных реакций аналогичен расчету опорных реакций эквивалентной балки т.е. балки с такой же нагрузкой [2, 4,6]. На Рис.4 дано изображение эквивалентной балки.

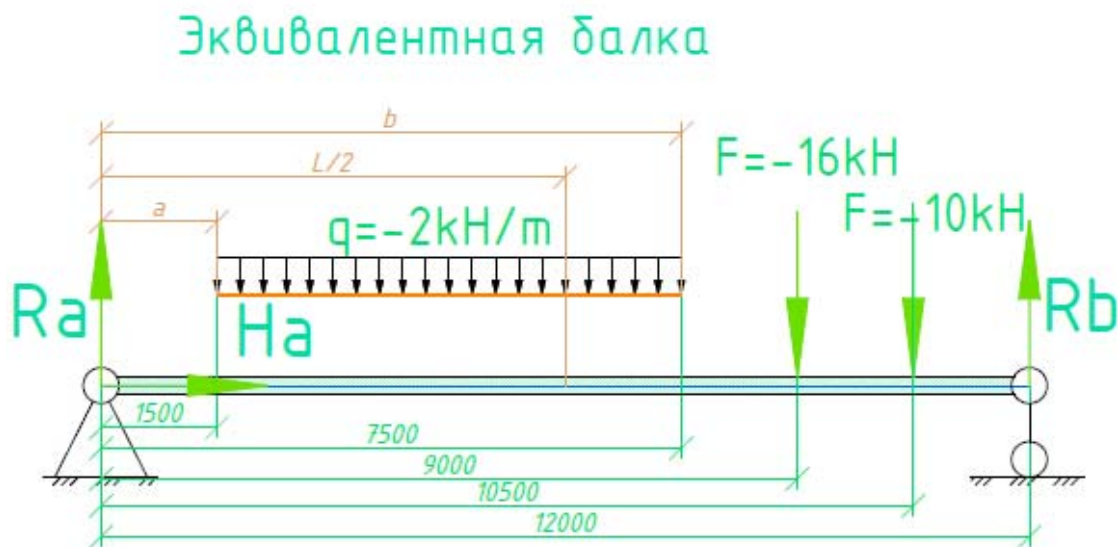


Рис.4 Расчетная схема эквивалентной балки.

$$\sum M_a = 0, \quad R_b \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 4,5 - 16 \cdot 9 - 10 \cdot 10,5 = 0 \quad R_b = 25,25 \text{ kH}$$

$$\sum M_b = 0, \quad R_a \cdot 12 - 2 \cdot 6 \cdot 7,5 - 16 \cdot 3 - 10 \cdot 1,5 = 0 \quad R_a = 12,75 \text{ kH}$$

Горизонтальная составляющая реакций опор находится из условия равенства нулю изгибающего момента в шарнире "С". Составляя уравнения равновесия в виде суммы моментов относительно шарнира "С" для левой части арки

получим, искомую горизонтальную составляющую (распор)[2,6]. На Рис.5 дано изображение расчетной схемы для определения распора.

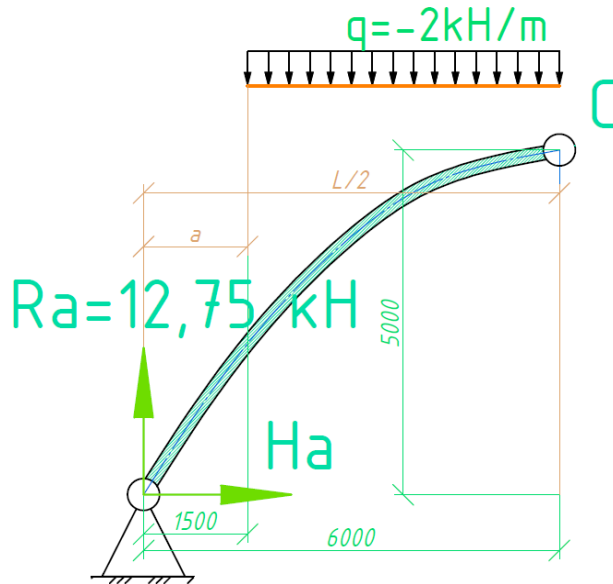


Рис.5 Расчетная схема для определения распора.

$$\sum M_c^{лев} = 0, H_a \cdot 5 - R_a \cdot 6 + 2 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = 0, H_a = 11,25 kH$$

3. Определение внутренних силовых факторов в трехшарнирной арке

Для определения внутренних силовых факторов изгибающего момента -M, поперечной силы – Q, продольной силы- N воспользуемся методом сечений. На Рис.6 изображены внутренние силовые факторы, подлежащие определению.

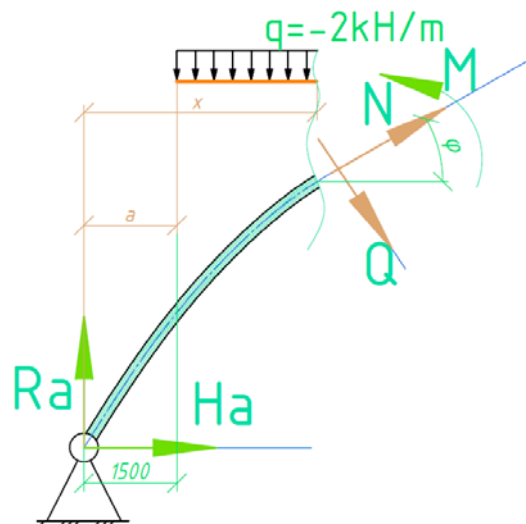


Рис.6 Внутренние силовые факторы арки.

Рассмотрим равновесие элемента в виде суммы моментов относительно точки сечения, а также суммы проекций сил на ось, касательную к оси арки в точке сечения и сумму проекций сил на ось перпендикулярную оси арки в той же точке. Рис.6

Проведя вышеуказанные действия и после незначительных преобразований получим:

$$\sum M = 0, \quad M = \left[R_a \cdot x - q(x-a) \cdot \frac{(x-a)}{2} \right] - H_a \cdot y \quad (1) \text{ -изгибающий}$$

момент

$$Q = [R_a - q(x-a)] \cos \varphi - H_a \cdot \sin \varphi \quad (2) \text{ -поперечная сила;}$$

$$N = -([R_a - q(x-a)] \cdot \sin \varphi + H_a \cdot \cos \varphi) \quad (3) \text{ -продольная сила;}$$

Рассмотрев в уравнении для изгибающего момента (1) выражение в скобках, нетрудно заметить, что это формула, позволяющая вычислить изгибающий момент в сечении эквивалентной балки Рис.4. В дальнейшем будем обозначать его - $M^{\bar{o}}$

$$M^{\bar{o}} = \left[R_a \cdot x - q(x-a) \cdot \frac{(x-a)}{2} \right] \quad (4)$$

Таким образом изгибающий момент в арке определится:

$$M = M^{\bar{o}} - H_a \cdot y \quad (5)$$

Аналогичным образом значения для поперечной и продольной силы:

$$Q = Q^{\bar{o}} \cos \varphi - H_a \cdot \sin \varphi; \quad (6)$$

$$N = -(N^{\bar{o}} \cdot \sin \varphi + H_a \cdot \cos \varphi) \quad (7)$$

Распор определится выражением:
$$H_a = \frac{M_c^b}{f} \quad [2,6].$$

Таким образом для определения внутренних силовых факторов трехшарнирной арки необходимо изначально определить значения факторов M^b , Q^b , N^b для эквивалентно-нагруженной балки Рис.4. Далее воспользоваться зависимостями 5,6,7 и произвести окончательные вычисления

4. Определение значений и построения эпюр внутренних силовых факторов с использованием вычислительной среды Mathcad

Для начала создания программы зададим положительные направления внешних силовых факторов, что и будем учитывать при составлении зависимостей. Это позволит создать унифицированную программу для расчета трехшарнирной арки при различных способах вертикального нагружения. Направления внешних силовых факторов будем задавать на эквивалентной балке [7].

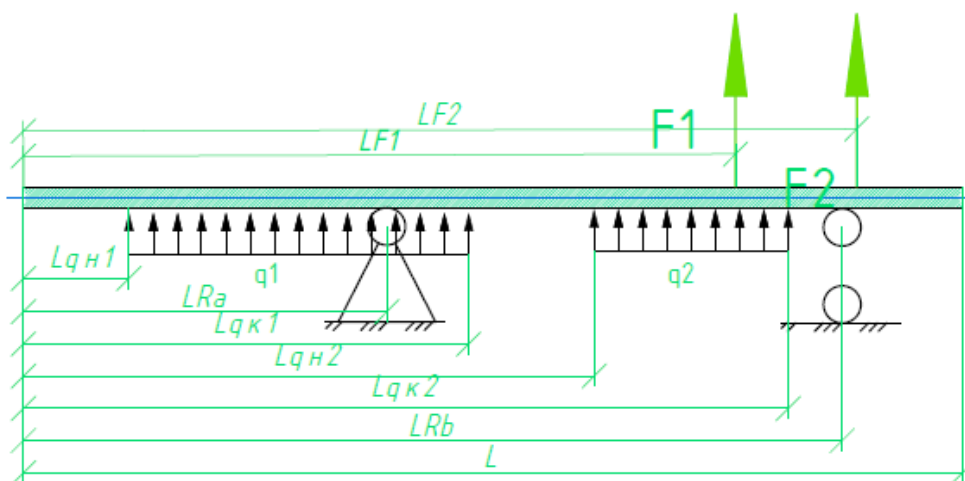


Рис.7 Положительные направления внешних силовых факторов.

На рис.7 указаны и условные обозначения всех элементов, которые будут представлены в программе.

Для задания исходных данных в среде Mathcad создадим размерный блок, в котором свяжем коэффициентами единицы измерения пользователя с величинами, заложенными в функционал Mathcad. Это делается, для автоматического определения размерности результата при вычислении [7].

$$\begin{aligned} & \text{ORIGIN} := 1 \\ & \text{м} := \text{m} \quad \text{см} := 0.01 \cdot \text{м} \quad \text{мм} := 0.001 \cdot \text{м} \quad \text{Н} := \text{N} \quad \text{МПа} := 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\ & \text{град} := \text{deg} \quad \text{Нм} := \text{N} \cdot \text{м} \quad \text{кН} := 1000 \cdot \text{N} \quad \text{кНм} := 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{м} \\ & f := 5 \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Далее задаем исходные данные в матричной форме:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{\text{св}} &:= \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} & L_F &:= \begin{pmatrix} 9 \\ 10.5 \end{pmatrix} \cdot \text{м} & q &:= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} & L_{\text{QH}} &:= \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м} & L_{\text{QK}} &:= \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м} \\ \underline{L}_{\text{RA}} &:= 0 \cdot \text{м} & \underline{L}_{\text{RB}} &:= 12.0 \cdot \text{м} & L_{\text{св}} &:= 12 \cdot \text{м} & x &:= 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} .. L & E &:= 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \end{aligned}$$

Переменную координату “x” задаем, как ранжированную переменную с шагом L/100 для более точного построения эпюр. Для расчета силовых факторов воспользуемся принципом независимого действия сил. Т.е. отдельно произведем расчет момента, поперечной и продольной силы от сосредоточенной нагрузки, отдельно от распределенной и отдельно от реакции опор. Математически это правило можно записать следующим образом:

$$Q_F(x) = \sum F_i ; \text{ поперечная сила от действия сосредоточенных нагрузок.}$$

Если распределенная нагрузка постоянной интенсивности приложена лишь на часть балки, то ее можно заменить двумя противоположными нагрузками: распределенной нагрузкой, приложенной от сечения L_{QH} до конца стержня, и фиктивной распределенной нагрузкой той же величины, но

противоположного направления, приложенной от сечения L_{qk} до конца стержня[7,8]:

$$Q_q(x) = \sum q_i(x)(x - L_{qn}) - \sum q_i(x)(x - L_{qk});$$

Для записи внутренних усилий в общем виде в среде Mathcad удобно использовать булевы операторы условия. Булевы операторы принимают значения 1, если логическое выражение в скобках верно, и 0, если — не верно. Умножение какого-либо слагаемого на булев оператор условия позволяет включить это слагаемое, если условие выполняется, или выключить его, если условие не выполняется. Использование булевых операторов позволяет выстраивать довольно сложные математические выражения. Таким образом, в программном виде уравнения для определения силовых факторов будут выглядеть:

$$Q_F(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x \geq L_{F_i})]$$

$$Q_q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qn_i}) \cdot (x \geq L_{qn_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qk_i}) \cdot (x \geq L_{qk_i})]$$

$$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) \quad Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$Q(R_A, R_B, x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$$

$$M_{zF}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})]$$

$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qn_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{qn_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qk_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{qk_i}) \right]$$

$$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$$

$$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$M_z(R_A, R_B, x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Для определения реакций опор воспользуемся функцией Find. Для расчета зададим некоторые начальные значения [7,8]:

$$R_A := 1.0 \cdot \text{кН} \quad R_B := 1.0 \cdot \text{кН}$$

Given $M_z(R_A, R_B, L) = 0 \quad Q(R_A, R_B, L) = 0$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A = 12.75 \cdot \text{кН} \quad R_B = 25.25 \cdot \text{кН}$$

Эпюра изгибающих моментов и поперечной силы эквивалентной балки представлены на Рис.8

Для корректного отражения положительных значений изгибающего момента (положительный снизу) на оси ординат момент поставлен со знаком “минус”.

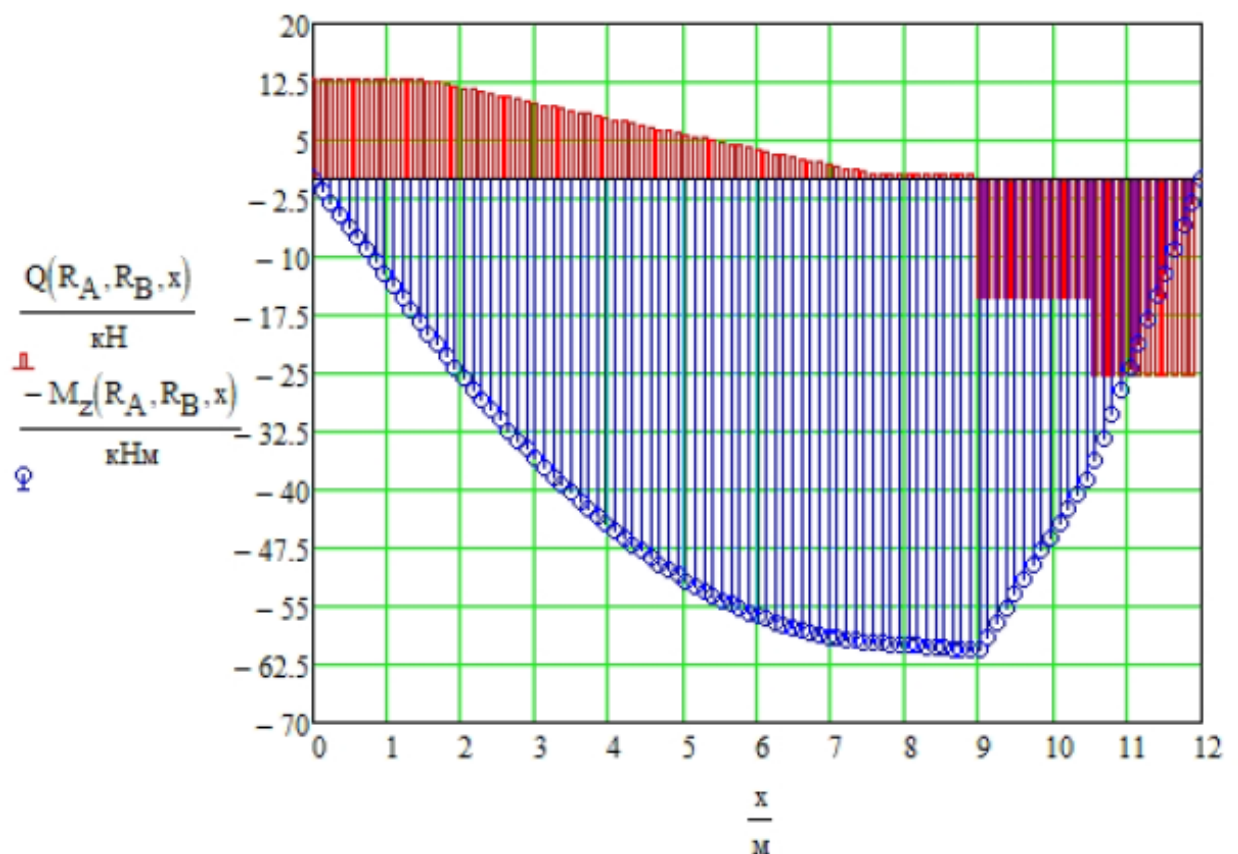


Рис.8 Эпюра изгибающих моментов и поперечной силы эквивалентной балки

Далее определяется значение распора и задается уравнение оси арки в координатах, начало которых совпадает с левой опорой арки.

$$H_a := \frac{M_z\left(R_A, R_B, \frac{L}{2}\right)}{f} = 1.125 \times 10^4 \text{ N} \quad H_a := 1.125 \times 10^4 \text{ N} \quad \text{- значение распора}$$

$$y(x) := \frac{4 \cdot f \cdot x}{L} - \frac{4 \cdot f \cdot x^2}{L^2} \quad M_{H_a}(x) := H_a \cdot \left(\left(\frac{4 \cdot f \cdot x}{L} - \frac{4 \cdot f \cdot x^2}{L^2} \right) \right)$$

Эпюра добавляющей составляющей $H_a \cdot y$ момента арки представлена на рис.9

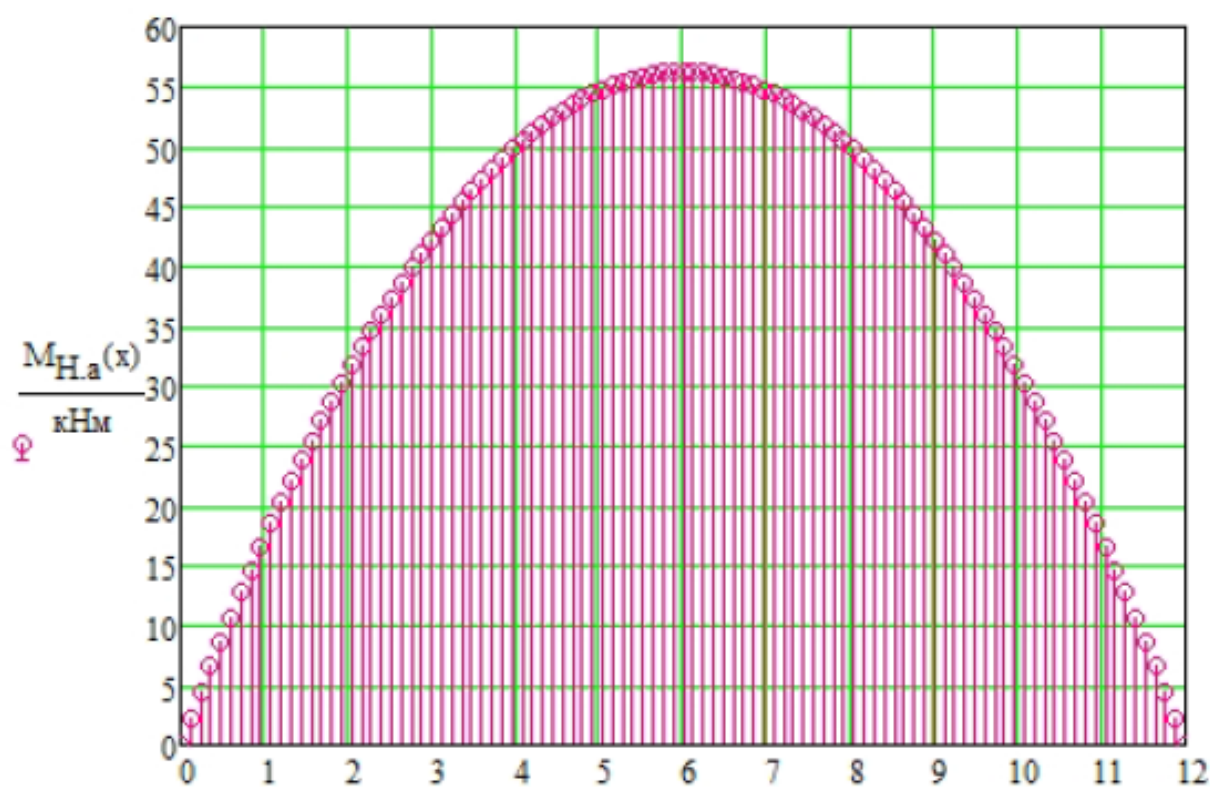


Рис.9 Эпюра добавляющей составляющей $H_a \cdot y$ момента арки

Выражение для определения итого изгибающего момента трехшарнирной арки будет выглядеть [7,8 ,9]:

$$M_{zar}(R_A, R_B, x) := (M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)) - M_{H.a}(x)$$

Итоговая эпюра изгибающего момента и ось арки представлена на рис.10

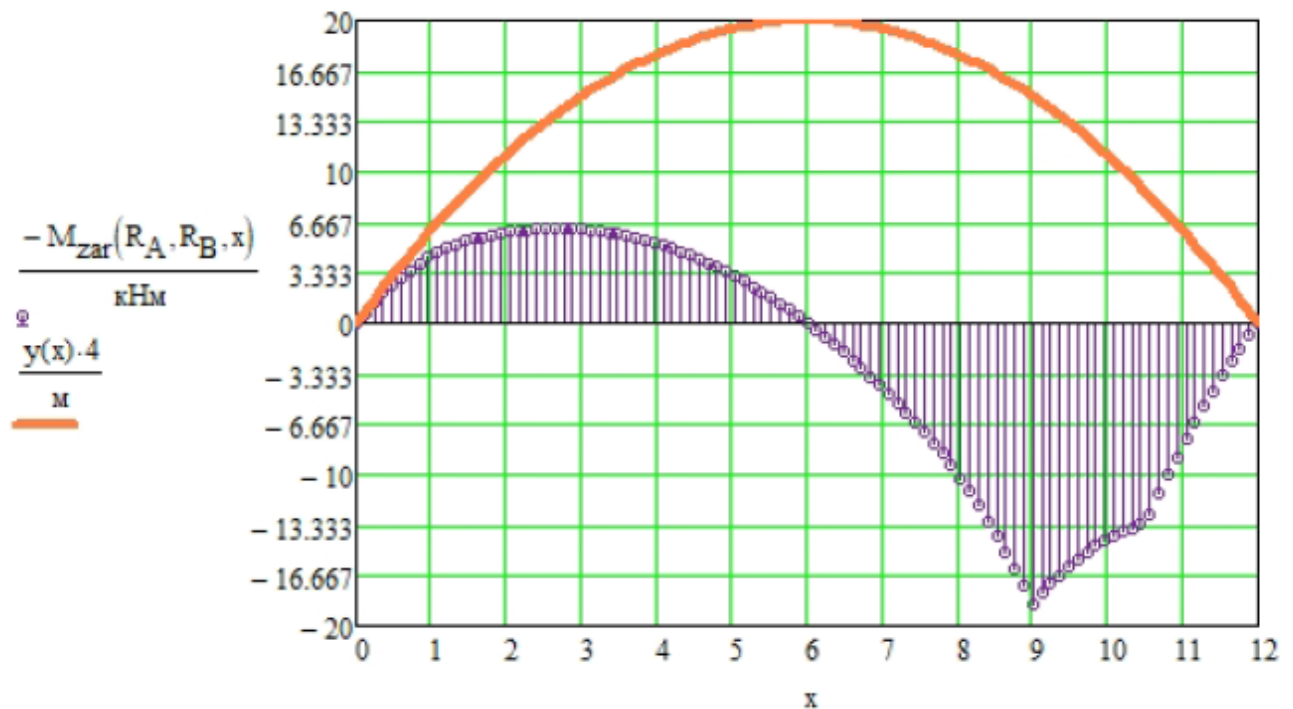


Рис.10 Итоговая эпюра изгибающего момента и ось арки.

Эпюры поперечной силы Q , продольной силы N , угла поворота φ и оси арки $y(x)$ представлены на рис .11 [7,10].

Выражения для их определения:

$$\tan(\varphi) := 4 \frac{f}{L^2} (L - 2x) \quad \varphi(x) := \text{atan} \left[4 \frac{f}{L^2} (L - 2x) \right]$$

$$Q_{yar}(x) := Q(R_A, R_B, x) \cdot \cos(\varphi(x)) + (-H_a) \cdot \sin(\varphi(x))$$

$$N_{ar}(x) := -(Q(R_A, R_B, x) \cdot \sin(\varphi(x)) + H_a \cdot \cos(\varphi(x)))$$

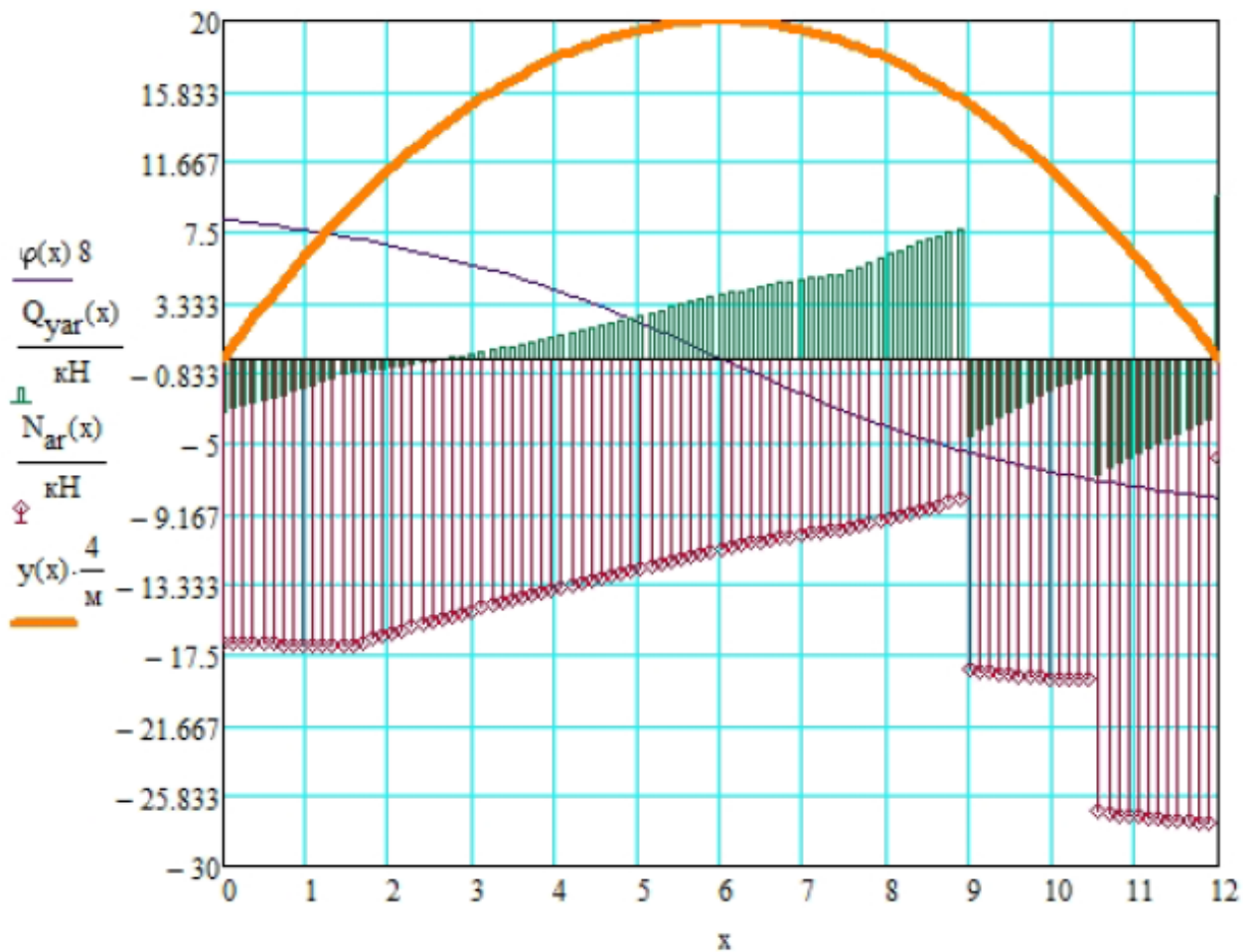


Рис.11 Эпюры поперечной силы Q , продольной силы N , угла поворота φ и оси арки $y(x)$.

Литература

1. Ким Д.А. Роль купольных зданий в архитектуре будущего // Инженерный вестник Дона, 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4687.
2. Соловей М.А., Мищенко О.А. Расчет плоских статически определимых систем. Киев: КНУБА, 2014. С. 2-44.
3. Igor A. Karnovsky Theory of Arched Structures. Strength, Stability, Vibration. London: Springer, 2012. pp. 19-26.
4. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнопрочной многопролетной балки // Инженерный вестник Дона, 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1571.

5. Соловей М.А., Мищенко О.А., Свешников О.Г. Кинематический анализ стержневых систем. Киев: КНУБА, 2012. С. 4-44.
6. Анохин Н.Н., Строительная механика в примерах и задачах. Часть 1. 4-е изд. М: Издательство АСВ, 2016. С. 7-90.
7. Макаров Е.Г., Сопротивление материалов на базе Mathcad. СПб: БХВ-Петербург, 2004. С. 61-183.
8. Каганов В.И., Компьютерные вычисления в средах Excel и Mathcad. 2-е изд. М: Горячая линия-Телеком, 2015. С. 173-209.
9. Wei Lu, Ding Zhou, Zhi Chen Practical Calculation of Cable-Stayed Arch Bridge Lateral Stability // scientific.net. 2014. №9. pp. 1586-1592.
10. Черняк А.А., Черняк Ж.А., Ю.А Доманова Ю.А., Высшая математика на базе Mathcad общий курс. СПб: БХВ-Петербург, 2004. С. 209-280.

References

1. Kim D.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2018. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4687.
2. М.А. Solovej, О.А. Mishchenko Raschet ploskih staticheski opredelimyh system.[The calculation of the plane statically determinate systems]. Kiev: KNUBA, 2014. pp. 2-44.
3. Igor A. Karnovsky Theory of Arched Structures. Strength, Stability, Vibration. London: Springer, 2012. pp. 19-26.
4. A.S. Шерпурненко, V.I. Andreev, B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus). 2013. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/157.
5. М.А. Solovej, О.А. Mishchenko, О.Г. Sveshnikov Kinematicheskij analiz sterzhnevyyh sistem.[Kinematic analysis of rod systems] Kiev: KNUBA, 2012. pp. 4-44.
6. Anohin N.N. Stroitel'naya mekhanika v primerah i zadachah. CHast' 1.



- [Construction mechanics in examples and tasks. Part 1]. 4-e izd. M: Izdatel'stvo ASV, 2016. pp. 7-90.
7. Makarov E.G. Soprotivlenie materialov na baze Mathcad. [Strength of materials based on Mathcad] SPb: BHV-Peterburg, 2004. pp. 61-183.
 8. Kaganov V.I. Komp'yuternye vychisleniya v sredah Exel i Mathcad. [Computer calculations in the software packages Excel and Mathcad]. 2-e izd. M: Goryachaya liniya-Telekom, 2015. pp. 173-209.
 9. Wei Lu, Ding Zhou, Zhi Chen scientific.net. 2014. №9. pp. 1586-1592.
 10. CHernyak A.A, CHernyak ZH.A, Domanova YU.A Vysshaya matematika na baze Mathcad obshchij kurs. [Higher mathematics on the base of Mathcad. General course] SPb: BHV-Peterburg, 2004. pp. 209-280.