Технология полиномиального фрагментарного регрессионного описания экспериментальных данных в методе «Cut-Glue» аппроксимации

Р.А. Нейдорф, В.В. Полях

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В работе рассматривается методологиярегрессионного математического описания фрагментов экспериментальных данных произвольной размерности полиномами необходимой для заданной точности порядка и структуры. Идея подхода заключается в отыскании структуры полинома минимальной сложности, коэффициенты которой, оптимизированные по критерию МНК, обеспечивают погрешность описания фрагмента не превышающую заданную. Такая постановка задачи возникает при математическом описании существенно нелинейных экспериментальных данных кусочным методом, т.е. аппроксимацией отдельных небольших фрагментов этих данных. Такой подход к построению общей математической модели требует максимального упрощения каждой модели фрагмента, чтобы упростить общую математическую систему. Возможность такого упрощения обеспечивается небольшими размерами и правильным выбором фрагмента, который не должен содержать участков значительной кривизны. Для осуществления структурно-параметрической оптимизации моделей фрагментов авторами предложен гибрид классического регрессионного анализа и модифицированного под задачу эволюционно-генетического алгоритма, посредством которого производится варьирование и оптимизация структуры полинома, описывающего фрагмент. Авторами разработано специальное программное средство, позволяющее производить оптимальную аппроксимацию фрагментов высокой размерности. Его работа и результаты демонстрируются на примере аппроксимации фрагмента реально полученных экспериментальных данных.

Ключевые слова: Оптимизация, аппроксимация, регрессионный анализ, математическая модель, экспериментальные данные, эвристические методы, эволюционно-генетический алгоритм.

Введение

Экспериментальное и компьютерное моделирование реальных объектов является сложной задачей. В частности, процессы моделирования носителей заряда в полупроводниках, а такжевольт-амперные характеристики элементов электрических цепей (процессы намагничивания и пр.) обусловливаются существенно нелинейными законами [1-6]. Существенно нелинейные характеристики имеют также механические объекты, транспортные средства, в том числе воздухоплавательные [7] При экспериментальном построении математических моделей (ММ) таких объектов решается задача математической обработки данных. При этом зависимости выходных данных являются существенно нелинейными. Задача аппроксимации таких зависимостей является трудоемкой, и связана со значительными погрешностями. Для их снижения применяют подходы, основанные на фрагментации исходного массива экспериментальных данных (ЭД). К ним относится кусочная аппроксимация [Лоран], метод сплайн-функций [8-11]. Они значительно повышают точность аппроксимации, но исключают или затрудняют возможности аналитического преобразования математических моделей (ММ) в силу их условно-логической записи. Однако в последнее время появился метод эффективногопостроения ММ по ЭД при их существенно нелинейном характере [1-6]. В работах [7, 12-16] предложен метод «Cut-Glue» аппроксимации (CGA), основанный на мультипликативном «вырезании» участков моделируемой зависимости, достаточно точно аппроксимированных аналитическими функциями и на их аддитивном «склеивании» в единую аналитическую функцию.

Важнейшим этапом метода CGA является операция аппроксимации выделенных в ЭД достаточно гладких фрагментов аналитическими функциями [16]. Ее задача состоит в том, чтобы эти функции были максимально просты, но обеспечивали погрешность аппроксимации не больше заданной. Такой подход упрощает общую модель аппроксимации ЭД.

Постановка задачи

Необходимо разработать алгоритм математического описания фрагментов ЭД достаточно простыми по структуре аналитическими функциями, допускающими варьирование их структурной сложности и дополнить его алгоритмом поисковой структурно параметрической оптимизации. Совокупный (гибридный) алгоритм должен для любого фрагмента ЭД, любой размерности находить математическую модель минимальной сложности, обеспечивающую заданную точность аппроксимации фрагмента.

Алгоритм аппроксимации фрагментов данных

Основываясь на работах [17-22], реализацию этапа построения аналитических функций, аппроксимирующих фрагменты зависимостей целесообразно возложить на хорошо отработанный аппарат классический регрессионного анализа (КРА) [21,22]. Степенные полиномы любого порядка имеют регулярную структуру, позволяющую оценивать, измерять и сопоставлять их сложность. При этом для каждой структуры КРА позволяет произвести ее параметрическую оптимизацию путем нахождения коэффициентов регрессии, минимизирующих квадратичный критерий ошибки аппроксимации. опыт работы в области эвристических алгоритмов поисковой оптимизации показал, что процесс структурно-параметрической оптимизации аппроксимирующей функции может быть осуществлен при помощи модифицированного эволюционно-генетического алгоритма (ЭГА) [23-25].

Исследования показали, что для организации структурно-параметрического варьирования аппроксимирующего степенного полинома размерности n удобно опереться на алгоритм представления его псевдолинейным полиномом расширенной размерности $\tilde{n}$. Такой полином имеет стандартный вид, но часть его аргументов не являются, фактически, независимыми аргументами, т.к. обозначают нелинейные комбинации истинных исходных аргументов:

$$q(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i \cdot \tilde{x}_i = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} b_i \cdot x_i + \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \hat{b}_i \cdot \hat{x}_i \qquad (1)$$

где $\tilde{b}_i$ – коэффициенты псевдо полинома $\tilde{n}$-ой размерности, а $\tilde{x}_i$ – обобщенные аргументы исследуемой зависимости, включая исходные аргументы b_i и x_i, а также псевдо аргументы $\hat{b}_i$ и $\hat{x}_i$, которые представляют из себя всевозможные сочетания исходных аргументов.

Последующее вычисление коэффициентов регрессии рассматриваемого варианта полинома производится с использованием известного матричного уравнения

$$\tilde{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y \qquad (2)$$

где y - вектор значений зависимой переменной, а X – исследуемая матрица входов, состоит из строк $\tilde{x}_i$, номера строк соответствуют номеру опыта, номера столбцов соответствуют члену полинома, значения $\tilde{x}_0$ - первого столбца матрицы X равняются единице.

Необходимо подчеркнуть, что аппарат КРА используется в его стандартном виде и не подвергается в гибридном алгоритме модификации. Его задача состоит в том, чтобы для каждого структурного варианта полинома осуществлять параметрическую оптимизации полиномиальных коэффициентов. Новизна гибридного алгоритма обусловливается двумя решениями: направленным варьированием структуры аппроксимирующего полинома, и предметно-ориентированной модификацией ЭГА.

Модификация ЭГА для решения задачи структурно-параметрической оптимизации модели фрагмента

Суть модификации ЭГА состоит в том, что регрессионный полином кодируется в виде, приближенном к хромосомоподобной структуре. При этом генно-хромосомную “маску” структуры произвольного полинома n-ой размерности и m-ой степени можно представить моделью, привязанной к структуре полного полинома (ПП) аналогичных n-ой размерности и m-ой степени, расположение элементов которого отвечает комбинаторным правилам возрастания индексов коэффициентов. Это соответствует структурно и параметрически возрастающему ряду индексов коэффициентов полинома следующего вида:

$$0,1,\ldots,n,11,12,\ldots,1n,22,23,\ldots,2n,\ldots,33,34,\ldots,3n,\ldots,nn,\ldots,111,112,\ldots,11n,\ldots,122,123,\ldots,12n,\ldots \quad (3)$$

Необходимость поиска структурно и параметрически оптимального варианта аппроксимирующего полинома обусловливается тем, что, зачастую, ПП не гарантирует получения наилучшей точности. Это связано с тем, что свойства некоторых нелинейных членов противоречат характеру аппроксимируемой зависимости. Члены полинома, лучше аппроксимирующие кривизну гиперповерхности экспериментальных данных каждого отдельного фрагмента, заранее неизвестны. В связи с этим возникает задача выявления порядка m, который демонстрирует ухудшение точности аппроксимации данных полным полиномом по сравнению с полным полиномом порядка $m-1$.

Следует отметить, что в случае исследования зависимости, состоящей из q элементов, в соответствии с предложенным алгоритмом, возможно её описание ПП такого порядка, при котором число его членов $p < q$. Таким образом, в качестве структуры, посредством которой производится исследование выступает полином максимально возможного порядка, в зависимости от исследуемого фрагмента данных.

В ходе исследования оптимальной структуры полинома производится варьирование его членов. Поскольку алгоритм полного перебора всех возможных сочетаний неполного полинома является *NP*-полным, его использование возможно лишь при небольшой размерности зависимости и небольшом порядке полинома. В общем случае для решения данного типа задач необходимо использовать эвристические алгоритмы. В данной работе использован ЭГА, предметно ориентированная модификация которого разработана в качестве инструмента поискового варьирования входящих в состав полинома членов.

Псевдо генно-хромосомная модель регрессии

Основой разработанного алгоритма является генно-хромосомной модели, в которой структура хромосомы ЭГА задается набором членов ПП m-ой степени. Алгоритмически генно-хромосомную структуру полинома можно задавать двоичной моделью. Это значит, что в качестве описания структуры полинома (последовательности генов в хромосоме ЭГА) используется запись, где «1» говорит о том, что данный член полинома используется в его конечной структуре (соответствующий коэффициент регрессии вычисляется по формуле (1)). Наличие «0» говорит о том, что данный член исключён из конечной структуры полинома (хромосомы ПГА), то есть коэффициент регрессии считается нулевым и не вычисляется. Таким образом, каждая позиция такой хромосомы имеет 2 аллеля: 0 и 1.

Тогда модель ПП, например, 4-ой степени при $n = 2$ в двоичном виде выглядит следующим образом – «111111111111111». В результате мутации хромосомы структура полинома подвергается изменению в соответствии с его текущим генно-хромосомным описанием. Например, в случае появления варианта хромосомы «110111111110101» из структуры ПП 4-ой степени исключается его 3-й (a_2x_2), 12-й ($a_{1112}x_1^3x_2$) и 14-й ($a_{1222}x_1x_2^3$) члены.

(n=2; m=4 – 0 1 2 11 12 22 111 112 122 222 1111 1112 1122 1222 2222)

Функционально разработанная модификация ЭГА включает в себя использование операторов кроссинговера, мутации и отбора. В качестве структурообразующей хромосомы используется описанная выше бинарная запись структуры рассматриваемого полинома, в роли генома выступают члены ПП (точнее, коэффициенты регрессии), которые могут быть включены или исключены из конечной структуры полинома.

Геннохромосомная модель является ядром предметной модификации ЭГА. Функционально в этой модификации используются стандартные операторы ЭГА (операторы мутации, кроссовера и отбора).

Структурно-параметрическая оптимизация регрессионного описания экспериментальных данных при помощи ЭГА

Для получения варианта, наиболее точно описывающего исследуемую выборку данных, результаты расчетов ранжируются в порядке убывания точности. Поэтому первый выводимый результат является параметрическим оптимумом решаемой задачи.

Однако зачастую результатов, удовлетворяющих допустимой погрешности аппроксимации оказывается достаточно много. Количество же всевозможных вариантов различной структуры неполного полинома, содержащего различное количество членов $k \in p$ полного полинома вычисляется по формуле:

$$P = \sum_{k=1}^{P} C_k^P = \sum_{k=1}^{P} \frac{p!}{(p-k)!k!} \qquad (4)$$

где p – количество членов полинома, а k – количество их в сочетаниях, образующих неполный полином.

Полный перебор всех вариантов исследуемой зависимости в любом конкретном случае является приемлемым подходом для выявления оптимального сочетания членов описывающего полинома, в том случае, если не требует несоразмерных временных затрат. Однако в случае исследования многомерных зависимостей с большим количеством данных полный перебор в силу его NP-полноты представляет собой неразрешимую задачу. Поэтому в гибридный алгоритм, наряду с подалгоритмом полного перебора, включен подалгоритм модифицированного ЭГА, который справляется с задачей поиска субоптимальной структуры аппроксимирующего полинома за приемлемое время. При этом, конечно, не гарантируется нахождение оптимальной структуры.

Полиномиальные варианты характеризуется как погрешностями, так и структурно-параметрическими оценками сложности описания. В качестве таких оценок могут рассматриваться такие параметры полинома, как его порядок, общее количество и порядок членов и т.п. Регуляризация этой, в значительной степени неформальной, задачи здесь не рассматривается, однако в представленной работе основным параметром структурной сложности выступает порядок полинома. Возможности предложенного подхода хорошо прослеживаются в приводимом ниже примере.

Пример применения ЭГА для оптимизации аппроксимации фрагментов описывающего полинома

В качестве примера применения предложенного подхода, решается задача полиномиальной аппроксимации фрагмента, взятого из массива экспериментальных данных, полученных при исследовании методом компьютерного моделирования зависимости осевого усилия $F_x(H)$ на пропеллере дирижабля от скорости $v\,(м/с) = x_1$ набегающего на него потока и скорости его вращения $\omega\,(об/мин) = x_2$. Зависимость приведена в таблице 1 (строки Exp.) и взята из работы [12]. Исследуемый фрагмент содержит 16 данных. Поэтому предельный порядок полного полинома, которым можно описать данные этого фрагмента равен 4 (при порядке 5 полный полином содержит 21 член, и для расчета коэффициентов регрессии не хватает степеней свободы). Полный полином 4-го порядка содержит $p = 15$ членов.

Таблица № 1

Массив данных исследуемой зависимости

$x_1 \backslash x_2$		1500	2000	2500	3000
30	Exp.	922,8	2911,4	5222	7884
	Regr.(4)	973	2897,9	5252,9	7882,4
	Regr.(3)	947,3	2885	5244	7864
40	Exp.	70,5	1860,3	4178,5	6899
	Regr.(4)	78,6	1897,7	4246,5	6967,8
	Regr.(3)	32,4	1854	4201	6916
50	Exp.	-1090	592,8	2877,3	5636,6
	Regr.(4)	-1061	620,3	2940	5738,9
	Regr.(3)	-1069	586	2872	5632
60	Exp.	-2312	-864,5	1338,7	4080,6
	Regr.(4)	-2294	-821	1406	4228,5
	Regr.(3)	-2296	-857,3	1318,4	4073,5
70	Exp.	-3562	-2445	-379	2288
	Regr.(4)	-3539	-2387	-354,2	2398
	Regr.(3)	-3586	-2413	-398,8	2301,5

Количество всевозможных вариантов различной структуры неполного полинома, содержащего различное количество членов $1 \leq k \leq 15$ полного полинома, вычисленное по формуле (5) составит $P = 77811$ структурных вариантов.

На первом этапе, исследуемая зависимость, представленная фрагментом, описывается при помощи полного полинома максимально возможного 4-го порядка, и порядка на 1 меньше – 3-го. По формулам (2) КРА и вычисляются коэффициенты обоих полиномов, а затем расчетные значения описываемого ими фрагмента матрицы. Рассчитанные по уравнениям регрессии с ПП 4-го и 3-го порядков оценки осевого усилия F_x проставлены в строках Regr.(4) и Regr.(3), соответственно. Анализ этих результатов показывает, что ПП 4-го порядка аппроксимирует фрагмент значительно хуже: максимальная абсолютная погрешность этой модели составляет 147,87, что соответствует относительной погрешности 0.03624. При $m = 3$ абсолютная ошибка составила всего 38, а относительная - 0.01276.

Однако не факт, что все дополнительные члены ПП 4-го порядка ухудшают точность аппроксимации. Поэтому в том случае, если точность аппроксимации фрагмента ПП 3-го порядка не устраивает исследователя, необходимо осуществить поиск более точных вариантов аппроксимации в среде членов ПП 4-го порядка.

В качестве инструмента исследования неполного полинома задействован представленный выше ЭГА. В рамках конкретного исследования происходит включение/исключение (варьирование) генов хромосомы (членов полинома) со следующими параметрами ЭГА: количество поколений = 1000, размер популяции = 10000, вероятность кроссинговера = 60%, вероятность мутации = 15%. Стоит отметить, что в процессе отработки решения задачи данные параметры настраивались, но описание этих экспериментов выходят за рамки тематики данной работы, и будут предметом отдельной статьи. Фрагмент таблицы результатов работы ЭГА представлены в табл. 2.

Среди отобранных вариантов произведено исследование соотношения сложности структуры полинома и обеспечиваемой им точности аппроксимации. В таблицу 2 отобраны варианты полинома, которые расположены в порядке возрастания погрешности аппроксимации. В столбцах таблицы представлены члены полного полинома 4-го порядка, входящие в (см. табл 1) с соответствующим кодом, указанным в верхней строке. Их отсутствие обозначается символом “--”. В двух последних колонках приведены оценки максимальной на множестве аппроксимируемых данных абсолютной и относительной ошибки, показывающие точность аппроксимации данных вариантами полинома

Таблица № 2

Результаты исследования структуры полинома

0	**1**	**2**	**11**	**12**	**22**	**111**	**112**	**122**	**222**	**1111**	**1112**	**1122**	**1222**	**2222**	**Абсолютная ошибка**	**Относ ошибка**
0	1	2	11	12	--	111	--	122	--	--	1112	--	1222	--	21,85576	0,00523
0	1	2	11	12	--	--	112	122	--	1111	--	--	1222	--	22,94357	0,00549
0	1	2	--	--	--	--	112	--	222	1111	--	1122	1222	2222	31,73257	0,00608
0	1	2	--	--	--	--	112	122	222	--	1112	1122	--	2222	42,90936	0,00622
0	--	2	--	--	--	--	112	122	222	--	1112	1122	--	2222	43,48233	0,0063
--	--	2	--	12	22	--	112	122	222	1111	--	1122	--	2222	33,6867	0,00645
0	--	--	--	--	22	--	112	122	222	1111	1112	--	1222	--	44,64845	0,00647
0	1	2	11	--	--	--	112	122	--	1111	1112	--	1222	--	45,88407	0,00665
0	1	2	11	--	--	111	112	122	--	--	1112	--	1222	2222	48,58431	0,00704
0	1	2	11	--	--	--	112	122	222	--	1112	--	--	2222	48,71063	0,00706
0	1	2	11	--	--	--	112	122	--	1111	1112	--	1222	2222	49,9319	0,00724
0	1	2	11	12	--	111	--	122	--	--	1112	--	1222	--	21,85576	0,00523
0	1	2	11	12	--	--	112	122	--	1111	--	--	1222	--	22,94357	0,00549

Из всех представленных вариантов в таблице стоит обратить внимание на 4 первых выделенных строки. Верхняя строка может считаться абсолютным структурно-параметрическим оптимумом, т.к. имеет наименьший из всех порядок 3 и наименьшую погрешность. Вторая комбинация, несмотря на наличие 3 добавочных членов имеет на 7,5% большую погрешность. Третья и четвертая комбинации более экономную структуру, чем вторая, проигрывая ей в точности аппроксимации данных. Это достаточно убедительно демонстрирует структурные вариации полиномиальной модели любого фрагмента данных для решения задачи оптимизации его математического описания. Остальные строки таблицы подтверждают отсутствие однозначной связи структурной сложности полинома и точности описания данных, оцениваемой по максимальной ошибке.

Заключение

1. Данное исследование показало, что применение различных критериев оценки точности построении уравнения регрессии (МНК) и оценки точности математического описания данных приводит к существенной неоднозначности связи структурной сложности и погрешности, что открывает возможности для постановки и решения задачи структурно параметрической оптимизации экспериментально получаемой математической модели.

2. Разработанный алгоритм и программное средство позволили реализовать эту парадигму и находить структурно и параметрически субоптимальный вариант полинома, описывающей исследуемый фрагмент рассматриваемой зависимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-08-01178/18 А; доложена на МНК САУиОИ и опубликована при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-07-20056 Г.

Литература

1. A. Isidori, Nonlinear Control Systems, third edition, Springer Verlag, London, 1995, pp.350-354.

2. A. Sen, M. Srivastava, Regression Analysis — Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2011 (4th printing), pp.147-154.

3. M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, second edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1978, p. 498

4. Recent Developments In Generalized Analytic Functions And Their Applications. Ed. Giorgadze G., Tbilisi, 2011, pp.43-59.

5. H. K. Khalil, Nonlinear Systems, third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, pp. 254-302.

6. Bates, Douglas M., Nonlinear regression analysis and its applications / Bates Douglas M., Watts Donald G., John Wiley & Sons, New York, 1988, 365 p.

7. Voloshin V., Y. Chen, R. Neydorf, A. Boldyreva. Aerodynamic Characteristics Study and Possible Improvements of MAAT Feeder Airships. SAE Technical Paper 2016-01-2035, 2016, doi:10.4271/2016-01-2035.

8. Alberg J.H., Nilson E.H., Walsh J.L.. The Theory of Splines and Their Applications, 1967, pp.76-94.

9. Prenter, P.M., “Splines and variational methods”, Wiley (1975), pp.172-193.

10. De Boor, C., “A practical guide to splines”, Springer (1978), pp.247-278.

11. Cieselski, Z., “Spline bases in function spaces,” Cieselski Z., Musielak J., Approximation theory, Reidel (1975) pp. 49-54

12. Neydorf, R. and Sigida, Y., "Identification of Traction and Power Characteristics of Air-Screw Propulsors in Mathematical Description of Airship," SAE Technical Paper 2014-01-2134, 2014, doi:10.4271/2014-01-2134.

13. Neydorf, R. and Neydorf, A., "Technology of Cut-Glue Approximation Method for Modeling Strongly Nonlinear Multivariable Objects. Theoretical Bases and Prospects of Practical Application," SAE Technical Paper 2016-01-2035, 2016, doi:10.4271/2016-01-2035.

14. Neydorf R., "Cut-Glue" Approximation in Problems on Static and Dynamic Mathematical Model Development," Paper of Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 14-20, 2014, Montreal, Quebec, Canada, IMECE2014,IMECE2014-37236 URL: proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?articleid=2204428

15. Neydorf, R., "Bivariate “cut-glue” approximation of strongly nonlinear mathematical models based on experimental data," SAE International Journal of Aerospace, № 1, vol. 8, 2015, pp.47-54, doi:10.4271/2015-01-2394.

16. Neydorf, R., Chernogorov, I., Polyakh, V., Yarakhmedov, O. et al., "Formal Characterization and Optimization of Algorithm for the Modelling of Strongly Nonlinear Dependencies Using the Method "Cut-Glue" Approximation of Experimental Data," SAE Technical Paper 2016-01-2033, 2016, doi:10.4271/2016-01-2033.

17. R. Dennis Cook; Sanford Weisberg Criticism and Influence Analysis in Regression,Sociological Methodology, Vol. 13. (1982), pp. 313–361.

18. Lindley, D.V. (1987). "Regression and correlation analysis," New Palgrave: A Dictionary of Economics, v. 4, pp. 120–23.

19. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Hermann, Paris, 1972, pp.112-132.

20. Rawlings John O., Pantula Sastry G., Dickey David A.. Applied Regression Analysis: A Research Tool, Second Edition. 1998, pp.144-154.

21. Drapper, N.R., Applied regression analysis, Vol. 1 / Drapper N.R., Smith H., John Wiley & Sons, New York, 1981, 366 p.

22. Drapper, N.R., Applied regression analysis, Vol. 2 / Drapper N.R., Smith H., John Wiley & Sons, New York, 1981, 351 p.

23. Eiben, A. E. "Genetic algorithms with multi-parent recombination". PPSN III: Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation. The Third Conference on Parallel Problem Solving from Nature: pp.78–87

24. Чернышев Ю.О. Применение комбинированных биоинспирированных стратегий (генетический алгоритм и алгоритм пчелиных колоний) для реализации криптоанализа классических шифров перестановок // Инженерный вестник Дона, 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4518

25. Нетёсов А.С. Эволюционно-генетический подход к решению задач оптимизации. Сравнительный анализ генетических алгоритмов с традиционными методами оптимизации // Инженерный вестник Дона, 2011, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/459

References

1. A. Isidori, Nonlinear Control Systems, third edition, Springer Verlag, London, 1995, pp.350-354.

2. A. Sen, M. Srivastava, Regression Analysis Theory, Methods, and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2011 (4th printing), pp.147-154.

3. M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, second edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1978, p. 498

4. Recent Developments In Generalized Analytic Functions And Their Applications. Ed. Giorgadze G., Tbilisi, 2011, pp.43-59.

5. H. K. Khalil, Nonlinear Systems, third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, pp. 254-302.

6. Bates, Douglas M., Nonlinear regression analysis and its, New York, 1988, 365 p.

7. Voloshin V., Y. Chen, R. Neydorf, A. Boldyreva SAE Technical Paper 2016-01-2035, 2016.

8. Alberg J.H., Nilson E.H., Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications, 1967, pp.76-94.

9. Prenter, P.M., “Splines and variational methods”, Wiley (1975), pp.172-193.

10. De Boor, C., “A practical guide to splines”, Springer (1978), pp.247-278.

11. Cieselski, Z., “Spline bases in function spaces,” Cieselski Z., Musielak J., Approximation theory, Reidel (1975) pp. 49-54

12. Neydorf, R. and Sigida, Y. SAE Technical Paper 2014-01-2134, 2014.

13. Neydorf, R. and Neydorf, A. SAE Technical Paper 2016-01-2035, 2016.

14. Neydorf R. Paper of Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, November 14-20, 2014, Montreal, Quebec, Canada, IMECE2014,IMECE2014-37236 URL: www.proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?articleid=2204428

15. Neydorf, R. SAE International Journal of Aerospace, № 1, vol. 8, 2015, pp.47-54.

16. Neydorf, R., Chernogorov, I., Polyakh, V., Yarakhmedov, O. SAE Technical Paper 2016-01-2033, 2016.

17. R. Dennis Cook; Sanford Weisberg Criticism and Influence Analysis in Regression, Sociological Methodology, Vol. 13. (1982), pp. 313–361.

18. Lindley, D.V. (1987). "Regression and correlation analysis," New Palgrave: A Dictionary of Economics, v. 4, pp. 120–23.

19. Laurent P.-J. Approximation et optimization. Hermann, Paris, 1972, pp.112-132.

20. Rawlings John O., Pantula Sastry G., Dickey David A.. Applied Regression Analysis: A Research Tool, Second Edition. 1998, pp.144-154.

21. Drapper, N.R., Applied regression analysis, Vol. 1, New York, 1981, 366 p.

22. Drapper, N.R., Applied regression analysis, Vol. 2, New York, 1981, 351 p.

23. Eiben, A. E. Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation. The Third Conference on Parallel Problem Solving from Nature: pp.78–87

24. Chernyshev U.O. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4518

25. Netesov A.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2011, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/459