Инженерный вестник Дона, №1 (2018)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4810

Потеря устойчивости стержня при неравномерно распределённой нагрузке

Л.А. Барагунова, М.М. Шогенова

Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик

Аннотация: Исследование устойчивости прямолинейных стержней, определение критических нагрузок, отыскание собственных значений и форм с использованием численных методов и современных программных средств.
Ключевые слова: устойчивость, критическая сила, дифференциальные уравнения, квадратная матрица, распределённая нагрузка, стержень переменного сечения, изгибающий момент, поперечная сила, момент инерции.

Изучение устойчивости прямолинейных стержней, нагруженных осевыми продольными силами, началось давно и остаётся актуальной проблемой техники до настоящего времени [1]. Например, не так легко определить критические нагрузки для сжатых стержней, если стержень переменного сечения под действием неравномерно распределённой нагрузки, различных сжимающих или растягивающих нагрузок. Определение собственных значений и форм в таких задачах аналитическими методами возможно только в частных случаях. Используя численные методы [2-5] и современные программные компьютерные средства, можно решить эту проблему.

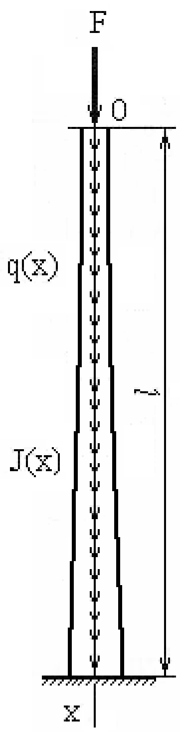

Рис. 1

На рисунке 1 изображён однородный упругий стержень переменного сечения, на который действует переменная распределённая нагрузка q(x) и сосредоточенные силы F_i, действующие вдоль оси. Внешние нагрузки считаются «мёртвыми», т. е. не меняются ни по величине, ни по направлению при деформировании стержня. Так же заданы функции изменения переменной жёсткости EJ(x) и распределённой нагрузки q(x).

Изогнутая ось стержня после бифуркации описывается с помощью линейного дифференциального уравнения [4]. Запишем их, используя традиционные обозначения

$$B(x)v''(x) = M(x), \qquad x \in [0, l], \qquad B(x) = EJ(x). \qquad (1)$$

В правой части уравнения (1) изгибающий момент определяется из условия равновесия отсечённой верхней части стержня. Например, по рис. 2

$$M(x) = -F\,v(x) - \int_0^x q(\xi)[v(x) - v(\xi)]\,d\xi\,. \qquad (2)$$

При учёте (2) уравнение (1) становится интегро-дифференциальным

$$B(x)v''(x) + F\,v(x) + \int_0^x q(\xi)[v(x) - v(\xi)]\,d\xi = 0\,, \quad x \in [0, l], \qquad (3)$$

Влияние необходимых граничных условий, в зависимости от типа опор, приводит к тому, что появляются четыре условия и уравнение (3) и, следовательно, к необходимости увеличения порядка производных в уравнении. Достигается такой результат после двукратного дифференцирования (3) по переменной x. Оно примет вид

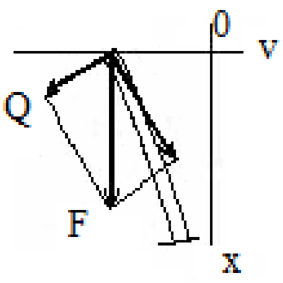

Рис. 2

$$[B(x)v''(x)]'' + N(x)v''(x) = 0, \qquad x \in [0, l], \qquad (4)$$

где для продольной сжимающей силы введено следующее обозначение

$$N(x) = F + \int_0^x q(\xi)d\xi..$$

Уравнение (4) имеет очевидное тривиальное решение, $v(x) \equiv 0$, что соответствует простому сжатию, что в данном случае исследуется. Задача состоит в том, чтобы определить критические силы, которым могут соответствовать ненулевые решения, т.е. искривлённые положения равновесия.

Отыскание аналитических решений в таких и других более сложных задачах практически невозможно. Выход состоит в использовании численных методов. Используя метод конечных разностей и разобьём длину стержня на n одинаковых отрезков с шагом $h = l/n$, с номерами узловых точек $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$.

Вместо непрерывной функции непрерывного аргумента v(x) введём сеточную функцию $y_i \approx v(x_i)$, $x_i = (i-1)h$. Тогда производные в уравнении (4) можно представлять приближённо в виде конечноразностных соотношений

$$v'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_{i-1})/2h, \qquad v''(x_i) \approx (y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2,$$

в силу чего оно примет вид

$$c_{i,i-2}\,y_{i-2} + c_{i,i-1}y_{i-1} + c_{i,i}y_i + c_{i,i+1}y_{i+1} + c_{i,i+2}y_{i+2} = 0, \qquad i = 3,\ 4,\dots,n-1. \quad (5)$$

При этом к левой части (4) процедура замены второй производной конечноразностным соотношением применена дважды. Коэффициенты уравнения имеют значения

$$c_{i,i-2} = B_{i-1}, \quad c_{i,i-1} = -2(B_{i-1} + B_i) + N_i h^2, \quad c_{i,i} = B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1} - 2N_i h^2,$$
$$c_{i,i+1} = -2(B_i + B_{i+1}) + N_i h^2, \qquad c_{i,i+2} = B_{i+1}, \qquad i = 3,\ 4,\dots,n-1.$$

Здесь

$$N_i = N(x_i).$$

Система уравнений (5) недоопределённая. Пока её матрица коэффициентов является прямоугольной $(n-3)\times(n+1)$. Используя граничные условия, могут быть найдены недостающие четыре уравнения, в силу чего их необходимо конкретизировать.

Верхний конец (x = 0) свободен и к нему приложена сила F. Поэтому:

1) Изгибающий момент равен нулю.

$$M(0)=0 \Rightarrow B(0)v''(0)=0 \Rightarrow v''(0) = \frac{2y_1-5y_2+4y_3-ó_4}{h^2}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y_1-5y_2+4y_3-ó_4=0. \tag{6}$$

2) Поперечная сила определяется с помощью функции прогибов

$$Q(0)=[B(0)v''(0)]'. \tag{7}$$

По рис. 2 с учётом малости угла поворота концевого сечения

$$Q(0)=-Fv'(0). \tag{8}$$

Приравнивая правые части (7) и (8), получим

$$[B(0)v''(0)]'=-Fv'(0).$$

Конечноразностная аппроксимация производных даёт уравнение

$$c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3+c_{24}y_4+c_{25}y_5=0, \tag{9}$$

где

$$b = -3B_1+4B_2-B_3, \quad c_{21}=2b - 5B_1-3Fh^2, \quad c_{22}= -5b + 18B_1+ 4Fh^2,$$
$$c_{23} = 4b - 24B_1 - Fh^2, \quad c_{24} = -b + 14B_1, \quad c_{25} = -3B_1.$$

Правый конец ($x = l$) защемлён, поэтому угол поворота и перемещение равны нулю

$$3)\, v'(l)=0 \Rightarrow \frac{1}{2h}(y_{n-1}-4y_n+3y_{n+1})=0 \Rightarrow y_{n-1}-4y_n+3y_{n+1}=0. \tag{10}$$

$$4)\, v(l)=0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1}=0 \tag{11}$$

Уравнения (5), (6), (9)-(11) образуют линейную однородную алгебраическую систему

$$Cy=0, \tag{12}$$

где $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ – вектор, компонентами которого являются отклонения стержня, C-квадратная матрица порядка $n+1$

$$C=\left(\begin{array}{cccccccccccc}
2 & -5 & 4 & -1 & & & \vdots & & & & & \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & & \vdots & & & & & \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & & \vdots & & & & & \\
 & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & \vdots & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & \vdots & c_{n-1,n-3} & c_{n-1,n-2} & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} & c_{n-1,n+1} \\
 & & & & & & \vdots & & & 1 & -4 & 3 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & 1
\end{array}\right)$$

Нулевые элементы матрицы здесь не выписаны.

Критические значения параметров нагрузок, т.е. собственные значения определяются из уравнения

$$\det(C)=0, \qquad (13)$$

которое является условием существования нетривиального решения уравнения (12). Решение уравнения аналитическими методами не представляется возможным, поэтому используем приближённые решения с помощью численных и графических методов. Численные методы приводят к громоздким компьютерным программам и реализуются с трудом. Графический метод является более предпочтительным. Данный метод основан на возможностях моментальной визуализации графика левой части уравнения (13) с помощью современных компьютерных программ MatLab, MathCad и т.д. Для этого в координатной системе F – det(C) на экране строится соответствующая кривая. Точки пересечения ею оси F и определяют значения критических сил. Имеется возможность увеличения любых фрагментов рисунка, что легко позволяет достигать высокой степени точности, и отличает компьютерный графический способ от обычного ручного способа небольшой точности.

Для проверки достоверности результатов, получающихся предлагаемым алгоритмом, проведено тестирование на примере консольного стержня постоянного сечения с входными данными:

$$l = \pi / 2, \qquad E = 1, \quad J = 1, \quad q \equiv 0.$$

При этом получены ожидаемые первые критические силы $F_к$ = 1, 9, 25 с высокой степенью точности, что позволяет уверенно переходить к задачам более общего характера.

Пример. Рассмотрим стальной стержень, имеющий поперечное сечение с переменным моментом инерции

$$J(x) = 30(1+20x/l)\ см^4.$$

К стержню приложена сосредоточенная сила F и неравномерно распределённая нагрузка

$$q(x) = \frac{F}{l}(l - x)\ Н/м,$$

ассоциированная с сосредоточенной силой так, что будет отыскиваться критическое значение только одного параметра F. Прочие исходные данные примем следующими:

$$l = 3\ м, \qquad E = 200\ ГПа.$$

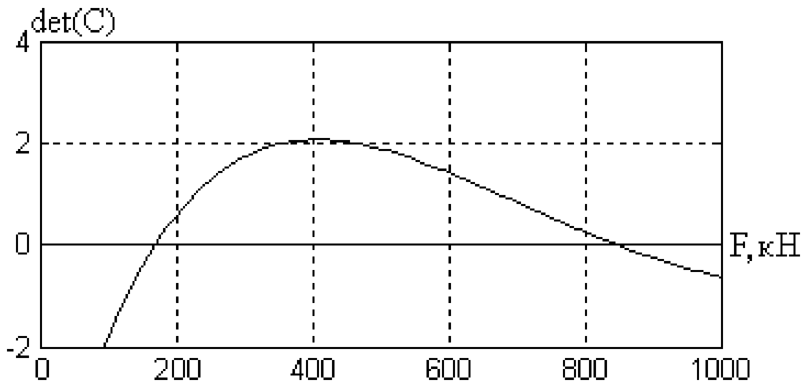

Рис. 3

Результат счёта, выданный на экран монитора, показан на рис. 3 в виде графика. После увеличения рисунка легко читаются первые элементы спектра собственных значений

$$F_к = \{168{,}9 \quad 849{,}2\}\ кН.$$

Подводя итог, подчеркнем, что получение такого результата аналитическими методами практически трудно. Между тем, имеется относительно простой способ определения критических сил, основанный на использование возможностей современной вычислительной техники.

Литература

1. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. – 984 с.

3. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. М.: Стройиздат. 1977. –154 с.

4. Культербаев Х.П., Барагунова Л.А. О реализации проблемы собственных значений сжато-растянутого стержня на компьютере. Компьютерные технологии в строительстве: Материалы Всероссийской научно-технической конференции. ДГТУ. – Махачкала: Алеф (ИП Овчинников), 2012. С. 90-94.

5. Культербаев Х.П. О структурировании пространства параметров сжато-растянутого стержня по механическому состоянию // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2009. № 3. С.85-88.

6. Барагунова Л. А. Определение критической силы сжатого стержня с промежуточными опорами. Наука, техника и технология XXI века (НТТ-2005). Материалы второй Всероссийской научно-технической конференции (Нальчик, 29-30 сентября 2005 г.). Часть II. С.16-20.

7. Литвинов С.В., Язьев Б.М., Бескопыльный А.Н., Ананьев И.В. Расчёт на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при начальной погиби стержня в виде S-образной кривой. // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/620/.

8. Барагунова Л.А. Устойчивость предварительно сжимаемой арматуры в железобетонных балках. // Инженерный вестник Дона, 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.

9. Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. SM study, №4, Solid Mechanical Division, University

of Waterloo. Ontario, Canada. – 1970. p. 167.

10. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending //Journal of Structural Engineering – ASCE. 1989. - N. 11. Vol. 115. PP. 2727-2739.

References

1. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem [Fundamentals of calculation on the stability of elastic systems]. M. Mashinostroenie, 1978. 312 p.
2. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh sistem. [Stability of deformable systems]. M.: Nauka. 1967. 984 p.
3. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachakh rascheta stroitel'nykh konstruktsiy. [The method of grids in the problems of calculating building structures]. M.: Stroyizdat. 1977. 154 p.
4. Kul'terbaev Kh.P., Baragunova L.A. Komp'yuternye tekhnologii v stroitel'stve: Materialy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii. DGTU. Makhachkala: Alef (IP Ovchinnikov), 2012. pp. 90-94.
5. Kul'terbaev Kh.P. Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. 2009. № 3. pp.85-88.
6. Baragunova L. A. Nauka, tekhnika i tekhnologiya XXI veka (NTT-2005). Materialy vtoroy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii (Nal'chik, 29-30 sentyabrya 2005). Chast' II. pp.16-20.
7. Litvinov S.V., Yazyev B.M., Beskopyl'nyy A.N., Anan'ev I.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/250/.
8. Baragunova L.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.
9. Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. SM study, №4, Solid Mechanical Division, University of Waterloo. Ontario, Canada. 1970. 167 p.

10. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending Journal of Structural Engineering ASCE. 1989. N. 11. Vol. 115. pp. 2727-2739.