Инженерный вестник Дона, №7 (2020)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2020/6538

Решение задач организации строительства методом линейного программирования

А.П. Суворов

Московский государственный строительный университет

Аннотация: В статье рассматриваются некоторые задачи экономики и организации строительства, которые могут быть решены методом линейного программирования. В первой задаче нужно определить состав строительных машин для выемки заданного количества грунта так, чтобы стоимость выполнения работ была минимальна. Во второй задаче грунт добывается из двух карьеров и нужно определить, сколько грунта нужно добыть на каждом из двух карьеров, чтобы стоимость перевозки была минимальна.
Ключевые слова: выемка грунта, песок, щебень, строительные машины, минимальная стоимость, линейное программирование, двухфазный симплекс-метод.

Введение

Методы оптимизации широко применяются для решения практических задач строительства. Например, в статьях [1-3] методы оптимизации используются для определения оптимального расположения объектов строительной площадки. Также оптимизационные методы используются широко и для решения задач строительной механики, например, для определения предельного равновесного состояния упруго-пластических систем, для расчета вантовых систем в геометрически-нелинейной постановке [4-6]. В статье [7] авторы применили оптимизационные методы для подбора значений предварительного напряжения волокон в композиционных материалах и плитах. Математические методы оптимизации были применены в статье [8] для расчета оптимальных параметров в установках промысловой подготовки нефти и в статье [9] и для оптимизации транспортного перемещения лесных грузов.

Одним из самых распространенных методов оптимизации является метод линейного программирования. Этот метод, в частности, применяется в строительной механике для определения предельного равновесия упруго-пластических конструкций [4-6] и в теории игр [10]. Теория метода линейного программирования и примеры решения многих задач изложены, в частности, в [11, 12].

Описание первой задачи и ее решение

Рассмотрим первую задачу. Требуется осуществить выемку грунта объемом 10000 м^3. Для выполнения этой задачи имеются пять строительных машин М1–М5. Мощности этих машин следующие: М1 – 28.235 м^3/час, М2 – 150 м^3/час, М3 – 90 м^3/час, М4 – 60 м^3/час, М5 – 40 м^3/час. Стоимость эксплуатации этих машин следующая: М1 – 17.5 у.е./час, М2 – 40 у.е./час, М3 – 27.5 у.е./час, М4 – 22 у.е./час, М5 – 47 у.е./час. Кроме того известно, что машина М1 не может эксплуатироваться более 6 часов в день, М2 – не более 6 часов в день, М3 – не более 6 часов в день, М4 – не более 8 часов в день, М5 – не более 5.5 часов в день. Оператор каждой машины не может работать более чем 5 раз в неделю, 8 часов в день. Требуется подобрать состав машин, обеспечивающий минимальную стоимость работ, и при этом произвести выемку грунта за недельный срок.

Обозначим через $x_1, x_2,\ldots, x_5$ – полное время работы каждой машины (в часах) в течение одной недели. Из условия задачи ясно, что каждая машина не может работать более 5 дней, поэтому можно сразу записать следующие ограничения на эти переменные

$$\begin{cases} x_1 \le 30 \\ x_2 \le 30 \\ x_3 \le 30 \\ x_4 \le 40 \\ x_5 \le 27.5 \end{cases}$$

Зная производительности этих машин (мощности) и полный объем грунта (10000 м^3), можно сформулировать следующее ограничение в виде равенства

$$28.235x_1 + 150x_2 + 90x_3 + 60x_4 + 40x_5 = 10000.$$

Целевая функция будет представлять полную стоимость работ

$$17.5x_1 + 40x_2 + 27.5x_3 + 22x_4 + 47x_5 \rightarrow min.$$

Будем решать данную задачу симплекс-методом. Преобразуем нашу задачу к стандартной форме, при которой все ограничения записываются в виде равенств. Для этого введем балансовые переменные s_1, s_2,…, s_5, которые должны быть неотрицательными. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 30 \\ x_2 + s_2 = 30 \\ x_3 + s_3 = 30 \\ x_4 + s_4 = 40 \\ x_5 + s_5 = 27.5 \end{cases}$$

Кроме того, ограничение по объему работ разделим на 40

$$0.7058x_1 + 3.75x_2 + 2.25x_3 + 1.5x_4 + x_5 = 250.$$

На этом этапе мы должны выбрать базисные переменные. На первой итерации метода в качестве базисных переменных должны выбираться балансовые переменные s_1, s_2,…, s_5. Однако нам мешает это сделать последнее ограничение по объему работ, так как в этом ограничении нет кандидатов на зачисление в базисные переменные. В этом случае мы должны применить двухфазный (двухэтапный) симплекс-метод. На первом этапе мы вводим искусственную переменную a_1 в ограничение по объему работ – эта переменная могла бы стать базовой на первой итерации метода

$$0.7058x_1 + 3.75x_2 + 2.25x_3 + 1.5x_4 + x_5 + a_1 = 250.$$

Эта переменная должна быть неотрицательной. На первом этапе мы решаем задачу с заданными ограничениями, но в ней целевая функция имеет простой вид:

$$a_1 \rightarrow min.$$

Очевидно, что ответом в этой задаче будет $a_1 = 0$, что и необходимо для выполнения равенства по объему работ. Но решение задачи на первом этапе нам также даст некоторое допустимое базисное решение и подскажет правильный выбор базисных переменных в дальнейшем. Далее на втором этапе мы возвращаемся к изначальной целевой функции и при этом на первой итерации симплекс-метода берем базисное решение, которое мы получили в конце первой фазы. Решая задачу на втором этапе симплекс-методом, мы находим решение исходной задачи.

Первый этап. Ограничения записываются в виде равенств:

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 30 \\ x_2 + s_2 = 30 \\ x_3 + s_3 = 30 \\ x_4 + s_4 = 40 \\ x_5 + s_5 = 27.5 \\ 0.7058x_1 + 3.75x_2 + 2.25x_3 + 1.5x_4 + x_5 + a_1 = 250 \end{cases}$$

Целевая функция:

$$a_1 \to min.$$

Выберем в качестве базисных переменных s_1, s_2,…, s_5, a_1. Тогда оставшиеся переменные x_1, x_2,…, x_5 станут свободными. Выражая базисные переменные через свободные переменные, мы получим:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ s_2 = 30 - x_2 \\ s_3 = 30 - x_3 \\ s_4 = 40 - x_4 \\ s_5 = 27.5 - x_5 \\ a_1 = 250 - 0.7058x_1 - 3.75x_2 - 2.25x_3 - 1.5x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$250 - 0.7058x_1 - 3.75x_2 - 2.25x_3 - 1.5x_4 - x_5 \to min.$$

Допустимое базисное решение этой задачи $s_1 = s_2 = s_3 = 30$, $s_4 = 40$, $s_5 = 27.5$, $a_1 = 250$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Будем улучшать наше решение, уменьшая при этом значение целевой функции. Мы видим, что на следующей итерации переменная x_2 должна войти в базис, а переменная s_2 должна выйти из него. В результате мы получим:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ s_3 = 30 - x_3 \\ s_4 = 40 - x_4 \\ s_5 = 27.5 - x_5 \\ a_1 = 137.5 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 - 2.25x_3 - 1.5x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$137.5 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 - 2.25x_3 - 1.5x_4 - x_5 \rightarrow min$$

Допустимое базисное решение теперь такое: $s_1 = x_2 = s_3 = 30$, $s_4 = 40$, $s_5 = 27.5$, $a_1 = 137.5$, $x_1 = s_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Чтобы улучшить это решение и уменьшить значение целевой функции, мы должны зачислить переменную x_3 в базис, а s_3 должна выйти из него. В результате мы получим:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ x_3 = 30 - s_3 \\ s_4 = 40 - x_4 \\ s_5 = 27.5 - x_5 \\ a_1 = 70 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 - 1.5x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$70 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 - 1.5x_4 - x_5 \rightarrow min$$

Допустимое базисное решение теперь такое $s_1 = x_2 = x_3 = 30$, $s_4 = 40$, $s_5 = 27.5$, $a_1 = 70$, $x_1 = s_2 = s_3 = x_4 = x_5 = 0$. На следующей итерации мы должны переменную x_4 отправить в базис, увеличивая ее значение. В данном случае мы можем увеличить значение x_4 до 40, при этом сохраняя положительный знак для переменной a_1. В результате мы будем иметь:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ x_3 = 30 - s_3 \\ x_4 = 40 - s_4 \\ s_5 = 27.5 - x_5 \\ a_1 = 10 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 + 1.5s_4 - x_5 \end{cases}$$

$$10 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 + 1.5s_4 - x_5 \to min$$

Допустимое базисное решение: $s_1 = x_2 = x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $s_5 = 27.5$, $a_1 = 10$, $x_1 = s_2 = s_3 = s_4 = x_5 = 0$. На следующей итерации переменная x_5 должна быть увеличена и, следовательно, стать базисной. Мы можем ее увеличить только 10, и при этом переменная a_1 становится равной нулю, а, следовательно, свободной. Выражая базисные переменные через свободные, будем иметь:

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ x_3 = 30 - s_3 \\ x_4 = 40 - s_4 \\ s_5 = 17.5 + 0.7058x_1 - 3.75s_2 - 2.25s_3 - 1.5s_4 + a_1 \\ x_5 = 10 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 + 1.5s_4 - a_1 \end{cases}$$

$$a_1 \to min.$$

Наше базисное решение теперь становится таким: $s_1 = x_2 = x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $s_5 = 17.5$, $x_5 = 10$, $a_1 = 0$, $x_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Первая фаза симплекс-метода закончена, так как решение задачи на первом этапе уже не может быть улучшено, ввиду того что целевая функция имеет только положительные коэффициенты при свободных переменных. Но полученное базисное решение является допустимым, и мы его можем использовать в начале решения задачи на втором этапе.

Второй этап. На втором этапе мы используем исходную целевую функцию, а ограничения записываем в таком виде, в котором они были получены в конце первого этапа. Но искусственная переменная a_1 при этом может быть вообще исключена, так как она останется равной нулю

$$\begin{cases} s_1 = 30 - x_1 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ x_3 = 30 - s_3 \\ x_4 = 40 - s_4 \\ s_5 = 17.5 + 0.7058x_1 - 3.75s_2 - 2.25s_3 - 1.5s_4 \\ x_5 = 10 - 0.7058x_1 + 3.75s_2 + 2.25s_3 + 1.5s_4 \end{cases}$$

Целевая функция

$$17.5x_1 + 40x_2 + 27.5x_3 + 22x_4 + 47x_5 \to min.$$

должна быть выражена только через свободные переменные x_1, s_2, s_3, s_4. Подставляя переменные x_2, x_3, x_4, x_5, выраженные через свободные переменные x_1, s_2, s_3, s_4, в целевую функцию, мы получим целевую функцию в таком виде:

$$3375 - 15.676x_1 + 136.25s_2 + 78.25s_3 + 48.5s_4 \to min.$$

Очевидно, что мы можем уменьшить значение целевой функции, если будем увеличивать x_1. Исходя из ограничений, мы можем увеличить x_1 только до значения $\frac{10}{0.7058} = 14.168$, и при этом переменная x_5 становится равной нулю и свободной. Теперь наши ограничения запишутся в таком виде:

$$\begin{cases} s_1 = 15.831 - 5.313s_2 - 3.188s_3 - 2.125s_4 + 1.4168x_5 \\ x_2 = 30 - s_2 \\ x_3 = 30 - s_3 \\ x_4 = 40 - s_4 \\ s_5 = 27.5 - x_5 \\ x_1 = 14.168 + 5.313s_2 + 3.188s_3 + 2.125s_4 - 1.4168x_5 \end{cases}$$

а целевая функция станет:

$$3152.9 + 52.96s_2 + 28.275s_3 + 15.1885s_4 + 22.209x_5 \rightarrow min.$$

Допустимое базисное решение теперь такое: $x_1 = 14.168$, $x_2 = x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $s_5 = 27.5$, $x_5 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Это решение является оптимальным. Значение стоимости работ при этом равно 3152.9 у.е.

Приводим короткую программу, написанную на языке Python, которая также может быть использована для решения поставленной задачи:

```
from numpy import *
from scipy.optimize import *
b=array([30.0,30.0,30.,40.,27.5])
A=identity(5)
beq=array([10000])
Aeq=array([[28.235,150,90,60,40]])
c=array([17.5,40,27.5,22,47])
res=linprog(c,A,b,Aeq,beq)
```

Описание второй задачи и ее решение

Рассмотрим вторую задачу. Из двух карьеров осуществляется добыча грунта. В карьере 1 грунт содержит 33% песка и 67% щебня. В карьере 2 доли песка и щебня одинаковы (50% песка и 50% щебня). Грунт с карьеров 1 и 2 свозится на стройплощадку, где он смешивается. Требуется получить всего 100000 м^3 грунта. Известно, что в полученной смеси должно содержаться как минимум 30% песка. Стоимость перевозки грунта на стройплощадку из карьера 1 равна 5 у.е. за м^3, а из карьера 2 – 7 у.е. за м^3 (карьер 2 находится дальше). Требуется найти количество грунта, которое нужно добыть на карьерах 1 и 2, чтобы стоимость перевозки была минимальной.

Решение этой задачи почти очевидно. Так как стоимость перевозки из карьера 1 меньше, чем стоимость перевозки из карьера 2, и грунт карьера 1 уже содержит необходимую фракцию песка (33% песка), то очевидно, что весь грунт должен добываться на карьере 1. Более интересной является задача, когда грунт карьера 1, являясь более дешевым по перевозке, не содержит необходимого количества песка (минимум 30%). Поэтому поменяем условие задачи, считая, что грунт карьера 1 содержит 25% песка и 75% щебня.

Введем следующие обозначения: x_{s1} – количество песка на первом карьере, x_{g1} – количество щебня на первом карьере. Аналогично для второго карьера введем переменные x_{s2}, x_{g2}. Тогда наша задача может быть записана в таком виде:

$$\begin{cases} 3x_{s1} - x_{g1} = 0 \\ x_{s2} - x_{g2} = 0 \\ x_{s1} + x_{s2} \geq 30000 \\ x_{s1} + x_{g1} + x_{s2} + x_{g2} = 100000 \end{cases}$$

А целевая функция примет вид:

$$5(x_{s1} + x_{g1}) + 7(x_{s2} + x_{g2}) \to min.$$

Ввиду простоты данной задачи будем рассматривать более общий случай ограничений и целевой функции:

$$\begin{cases} \alpha x_{s1} - x_{g1} = 0 \\ \beta x_{s2} - x_{g2} = 0 \\ x_{s1} + x_{s2} \geq 30000 \\ x_{s1} + x_{g1} + x_{s2} + x_{g2} = 100000 \end{cases}$$

$$r(x_{s1} + x_{g1}) + (x_{s2} + x_{g2}) \to min,$$

где r- это число меньше единицы, если карьер 1 дешевле карьера 2 и больше единицы, если наоборот. Мы условимся считать, что грунт карьера 2 удовлетворяет требованию содержания как минимум 30% песка, а грунт карьера 1 не удовлетворяет этому условию – в карьере 1 слишком мало песка. (Иначе решение этой задачи было бы тривиальным, как мы уже видели.) Это требование приводит к ограничениям $\alpha > \frac{7}{3}$, $\beta < \frac{7}{3}$.

Решим эту задачу, исключая переменные x_{g1}, x_{g2}. Тогда:

$$\begin{cases} x_{s1} + x_{s2} \geq 30000 \\ x_{s1}(1 + \alpha) + x_{s2}(1 + \beta) = 100000 \end{cases}$$

$$r x_{s1}(1 + \alpha) + x_{s2}(1 + \beta) \to min.$$

Из второго ограничения-равенства можно исключить и переменную x_{s2}, выразив ее через x_{s1}. Тогда мы получим:

$$\begin{cases} x_{s1} \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \beta} \leq \dfrac{70000 - 30000\beta}{1 + \beta} \\ x_{s2} = \dfrac{100000}{1 + \beta} - x_{s1} \dfrac{1 + \alpha}{1 + \beta} \end{cases}$$

$$(r - 1)(1 + \alpha)x_{s1} + 100000 \to min.$$

Если $r < 1$ (карьер 1 дешевле карьера 2), то минимум целевой функции достигается при максимальном значении x_{s1}, т.е. при

$$x_{s1} = \frac{70000 - 30000\beta}{\alpha - \beta}.$$

Эта величина положительна, так как мы условились считать, что $\alpha > \frac{7}{3}$, и $\beta < \frac{7}{3}$. Величина x_{s2} при этом находится из второго ограничения-равенства

$$x_{s2} = \frac{-70000 + 30000\alpha}{\alpha - \beta}.$$

x_{s1} тоже является положительной величиной. Очевидно, что при этом $x_{s1} + x_{s2} = 30000$, т.е. доля песка в смеси всегда равна минимально возможному значению (30%). Также заметим, что объемы свозимого песка не зависят от соотношения стоимостей перевозок, т.е. не зависят от r. При $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $r < 1$ мы имеем такое решение $x_{s1} = 20000$, $x_{g1} = 60000$, $x_{s2} = x_{g2} = 10000$. Очевидно, что большая часть грунта все равно свозится с карьера 1, так как он дешевле.

Заключение

В данной статье были рассмотрены две задачи организации строительства, которые могут быть решены методом линейного программирования. Подробно рассмотрено решение двух задач: задача подбора оптимального состава строительных машин для выемки грунта и задача о смеси грунтов, добытых в разных карьерах. Для решения первой задачи был использован двухфазный симплекс-метод. Решение второй задачи было получено без применения симплекс-метода. В обоих случаях целевая функция была выбрана таким образом, чтобы минимизировать стоимость выполнения строительных работ.

Литература

1. Papadaki I.N., Chassiakos A.P. Multi-objective construction site layout planning using genetic algorithms // Procedia Engineering. 2016. №164. pp. 20-27.

2. Ning X., Qi J., Wu C., Wang W. Reducing noise pollution by planning construction site layout via a multi-objective optimization model // Journal of Cleaner Production. 2019. №222. pp. 218-230.

3. Hammad A.W.A., Rey A.D. A multi-objective mixed integer nonlinear programming model for construction site layout to minimize noise pollution and transport costs // Automation in Construction. 2016. №61. pp. 73-85.

4. Чирас А.А. Строительная механика. Москва: Стройиздат, 1989. 256 с.

5. Чирас А.А., Борраускас А.Э., Каркаускас Р.П. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Л.: Стройиздат, 1974. 279 с.

6. Чирас А.А. Математические модели анализа и оптимизации упруго-пластических систем. Вильнюс, Мокслас, 1982. 112 с.

7. Suvorov A.P., Dvorak G.J. Optimized fiber prestress for reduction of free edge stresses in composite laminates // International Journal of Solids and Structures. 2001. №38. pp. 6751-6786.

8. Караневская Т.Н., Шумихин А.Г. Оптимизация технологических режимов при управлении процессами промысловой подготовки нефти // Инженерный вестник Дона. 2019. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5917.

9. Крупко А.М., Воронин И.А., Крупко Н.С. Моделирование движения лесных грузов по комбинированным транспортным сетям // Инженерный вестник Дона. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2050.

10. Кремлев А.Г. Основные понятия теории игр: учебное пособие. Екатеринбург: изд-во Урал. Университета, 2016. 144 с.

11. Юдин Д.Б., Гольдштейн Е.Г. Линейное программирование. Москва: Физматгиз, 1963. 775 с.

12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. Москва: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003. 304 с.

References

1. Papadaki I.N., Chassiakos A.P. Procedia Engineering. 2016. №164. pp. 20-27.

2. Ning X., Qi J., Wu C., Wang W. Journal of Cleaner Production. 2019. №222. pp. 218-230.

3. Hammad A.W.A., Rey A.D. Automation in Construction. 2016. №61. pp. 73-85.

4. Chiras A.A. Stroitel’naya Mekhanika [Structural Mechanics]. Moskva: Stroyizdat, 1989. 256 p.

5. Chiras A.A., Borkauskas A.E., Karkauskas R.P. Teoriya i metody optimizatsii uprugo-plasticheskikh system [Theory and Methods of Optimization of Elasto-Plastic Systems]. L.: Stroyizdat, 1974. 279 p.

6. Chiras A.A. Matematicheskie modeli analiza i optimizatsii uprugo-plasticheskikh system [Mathematical Models for Analysis and Optimization of Elasto-Plastic Systems]. Vilnius, Mokslas, 1982. 112 p.

7. Suvorov A.P., Dvorak G.J. International Journal of Solids and Structures. 2001. №38. pp. 6751-6786.

8. Karanevskaya T.N., Shumikhin A.G. Inzenernyj vestnik Dona. 2019. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2019/5917.

9. Krupko A.M., Voronin I.A., Krupko N.S. Inzenernyj vestnik Dona. 2013. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2050.

10. Kremlev A.G. Osnovnye ponyatiya teorii igr: uchebnoe posobie [Main Concepts of Game Theory: Tutorial]. Yekaterinburg: izd-vo Ural. University, 2016. 144 p.

11. Yudin D.B., Gol'dshtein E.G. Lineinoe programmirovanie [Linear Programming]. Moskva: Fizmatgiz, 1963. 775 p.

12. Danko P.E., Popov A.G., Kozhevnikova T.Ya. Vysshaya matematika v uprazhneniyakh i zadachakh. Chast' 1 [High Mathematics via Exercises and Problems. Part 1]. Moscow: Izdatel'ski dom «ONIKS 21 vek»: Mir i Obrazovanie, 2003. 304 p.