

## Чистый изгиб наследственно вязкоупругопластических прямоугольных пластин

*А.С. Кравчук<sup>1</sup>, А.И. Кравчук<sup>2</sup>, С.А. Томилин<sup>3</sup>, С.Ф. Годунов<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Филиал Белорусского национального технического университет  
«Научно-исследовательский политехнический институт», Минск*

*<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск*

*<sup>3</sup>Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального  
исследовательского ядерного университета «МИФИ», Волгодонск*

**Аннотация:** На основе предложенного Тимошенко С.П. решения задачи чистого изгиба упругой прямоугольной пластины под действием моментов постоянной интенсивности, действующих на ее границе, впервые предлагается теория изгиба вязкоупругопластичных пластин, закрепленных в вершинах. Предлагаемое решение использует наследственную теорию с учетом гипотезы Арутюняна Н.Х. о постоянстве коэффициента поперечной деформации. Впервые предложен метод пересчета распределенной поперечной нагрузки, приложенной на поверхности пластины в эквивалентные моменты постоянной интенсивности, зависящие от времени и приложенные на краях. Впервые с помощью данной теории решена задача об изгибе пластины, зашпеленной в одной угловой точке, распределенной поперечной нагрузкой. В качестве примеров приведены расчеты прямоугольных пластин под действием собственного веса.

**Ключевые слова:** чистый изгиб, прямоугольная пластина, закрепление в угловых точках, наследственная вязкоупругопластичность, линеаризация, уравнение состояния, напряжение, деформация, нейтральный слой, перемещение.

Одним из основных направлений технического прогресса в машиностроении и строительстве является повышение прочности, надежности и живучести элементов конструкций. Это достигается как использованием новых материалов [1-3], так и включением в практику проектирования уточненных методов расчета.

В настоящее время теория чистого изгиба призматического бруса и ее обобщение С.П. Тимошенко [4, 5] на случай пластин является классической и настолько простой [4-6], что складывается впечатление, что провести какое-либо обобщение или уточнение данных исследований сложно и исследователям остается лишь применять на практике уже известные теоретические результаты [7].

Как и другие исследователи, будем называть чистым изгиб пластин, при котором изгибающие моменты в перпендикулярных плоскостях являются единственными внутренними силовыми факторами, возникающем во взаимно перпендикулярных поперечных сечениях пластины. Таким образом, предполагаем, что в пластине нет никаких сдвигов и соответственно касательных напряжений.

Прежде всего отметим, что рассматриваемая теория чистого изгиба пластины моментами с постоянной интенсивностью [4, 5], приложенных к ее краям, вообще рассматривается в основном только как теоретический пример, не имеющий никакого прикладного значения.

Несмотря на огромный интерес к теории изгиба пластин, опертых по всему периметру [8, 9], в литературе до сих пор не обращено внимания, что предложенная С.П. Тимошенко в 1966 г. [4] теория решает практически важную и сложную задачу изгиба шарнирно закрепленных в угловых точках прямоугольных пластин.

Этой теории не хватало нескольких методических уточнений для того, чтобы она стала полноправной инженерной методикой решения прикладных задач. Это касается, например, метода замены поперечной нагрузки, распределенной по поверхности пластины эквивалентными моментами постоянной интенсивности, действующими на краях пластины. Кроме того, до настоящего времени в литературе отсутствуют рекомендации по моделированию вязкоупругопластического поведения материала пластин.

**Линеаризация мгновенной диаграммы зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций. Замена наследственной вязкоупругопластичности уравнением вязкоупругости.** Необходимо пояснить, что мгновенной диаграммой зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций называется обычная диаграмма  $\sigma_u = f(\varepsilon_u)$ . Мгновенной она называется в случае исследований процессов

---

установившейся ползучести в связи с тем, что время, затрачиваемое на нагружение образца, несопоставимо мало по сравнению со временем исследования установившейся ползучести материала.

Именно нелинейная мгновенная диаграмма зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций определяет нелинейность в уравнении наследственной вязкоупругопластичности. Однако в рамках данного исследования предлагается нелинейную мгновенную упругопластическую диаграмму линеаризовать с помощью секущего модуля сдвига и перейти к рассмотрению линейно вязкоупругой модели.

Предполагается, что известна наибольшая интенсивность деформаций материала пластины  $\varepsilon_{u,np}$ , исходя из предварительных оценочных расчетов. Таким образом, задан отрезок  $[-\varepsilon_{u,np}, \varepsilon_{u,np}]$  на оси интенсивности деформаций. Тогда нелинейное поведение  $f$  материала при интенсивностях деформации на отрезке  $[-\varepsilon_{u,np}, \varepsilon_{u,np}]$  приближается линейной функцией с секущим модулем сдвига  $G_{сек}$ , например, по правилу наименьших квадратов [10, с. 232]:

$$\int_{-\varepsilon_{u,np}}^{\varepsilon_{u,np}} (f(\varepsilon_u) - 3 \cdot G_{сек} \cdot \varepsilon_u)^2 d\varepsilon_u \rightarrow \min.$$

Таким образом, в данной статье для моделирования вязкоупругопластического прогиба пластин используется его линеаризованный аналог наследственного уравнения с определенным заранее секущим модулем сдвига  $G_{сек}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . При этом коэффициент Пуассона  $\nu$  предполагается постоянным и не зависящим от деформации ползучести (гипотеза Арутюняна) [11].

В дальнейшем в рамках данного исследования, для решения поставленной линеаризованной задачи будем использовать секущий модуль

упругости  $E_{сек}$ , получаемый из известного уравнения  $E_{сек} = 2 \cdot G_{сек} \cdot (1 + \nu)$ , и известный коэффициент Пуассона  $\nu$ .

Описанный путь линеаризации уравнений мгновенного состояния через линеаризацию мгновенной диаграммы связывающей интенсивность напряжений с интенсивностью деформаций является теоретическим, отражающим структуру уравнений вязкоупругопластичности, записанную в компонентах девиаторов.

Однако на практике предлагаемый подход сводится к линеаризации обычной диаграммы одноосного растяжения  $\varphi(\varepsilon_1)$  с помощью текущего модуля  $E_{сек}$ , например, по уже упомянутому правилу наименьших квадратов:

$$\int_{-\varepsilon_{np}}^{\varepsilon_{np}} (\varphi(\varepsilon_1) - E_{сек} \cdot \varepsilon_1)^2 d\varepsilon_1 \rightarrow \min$$

на заранее определенном интервале деформаций  $[-\varepsilon_{np}, \varepsilon_{np}]$ .

**Основные гипотезы, используемые в простейшей модели изгиба прямоугольной пластины постоянной толщины.** При построении обобщенной технической теории чистого изгиба прямоугольную пластину постоянной толщины можно разделить на элементарные слои (рис. 1). Будем предполагать, что продольные слои в пластине не взаимодействуют в поперечном направлении.

Главные моменты, приложенные к краям пластины, обозначим через  $M_x(t)$  и  $M_y(t)$  они действуют в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  соответственно. Интенсивности главных моментов  $M_x(t)/a$  и  $M_y(t)/b$  – величины постоянные и равномерно распределенные по соответствующим сторонам пластины.

Пусть пластина имеет ширину  $a$  (вдоль направления  $Ox$ ), длину  $b$  (вдоль направления  $Oy$ ), а также постоянную высоту  $h$ . Это значит, что при нагружении моментами постоянной интенсивности отклонения в высоте поперечного сечения малы по сравнению с радиусами кривизны пластины и не

вносят существенную поправку в определение его напряженно-деформированного состояния. Будем предполагать, что у прямоугольной пластины постоянной толщины при чистом изгибе существует нейтральный слой – слой, длина которого не изменяется при изгибе. Предполагается, что пластину можно условно разделить на слои с постоянной толщиной  $\lambda$  (рис. 1).

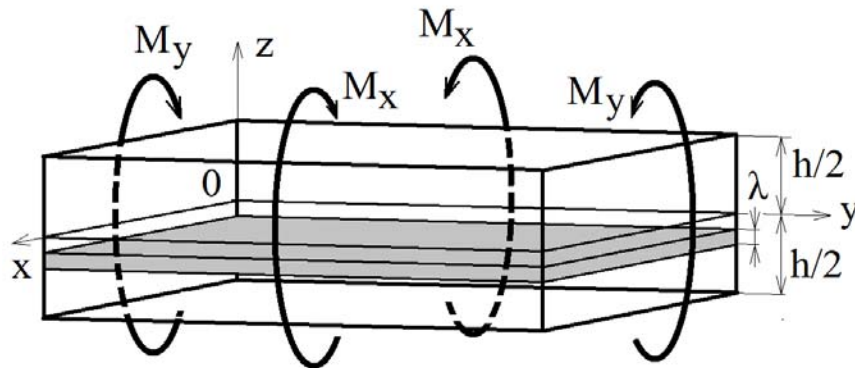


Рис. 1. – Чистый изгиб прямоугольной пластины постоянной толщины

**Исследование ползучести и распределения напряжений прямоугольной пластины в условиях чистого изгиба.** Следуя монографии Тимошенко С.П. [4], исходя из очевидных рассуждений о геометрическом подобии продольных размеров элементарных слоев размерам нейтрального слоя, можно установить, что нормальные деформации элементарного слоя  $\varepsilon_x(z,t)$ ,  $\varepsilon_y(z,t)$  относительно геометрического положения нейтрального слоя распределены следующим образом [4]:

$$\varepsilon_x(z,t) = \frac{z - \delta(t)}{\rho_x(t)}, \quad \varepsilon_y(z,t) = \frac{z - \delta(t)}{\rho_y(t)}, \quad (1)$$

где  $\delta(t)$  - координата нейтрального слоя относительно геометрической середины пластины;  $\rho_x(t)$ ,  $\rho_y(t)$  – радиусы кривизны нейтрального слоя в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  соответственно.

Таким образом, пластина изгибается приложенными по прямоугольным краям моментами с постоянной по одной из координат интенсивностью и действующими во взаимно перпендикулярных плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ . В случае использования наследственной модели ползучести с учетом гипотезы Арутюняна Н.Х. [11] о постоянстве коэффициента поперечной деформации для плоского напряженного состояния (т.е.  $\sigma_z = 0$ ) можно получить с учетом гипотез о полном отсутствии сдвигов ( $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) следующие уравнения для нормальных деформаций в плоскости пластины  $\varepsilon_x(z, t)$ ,  $\varepsilon_y(z, t)$  напряжений  $\sigma_x(z, t)$ ,  $\sigma_y(z, t)$  [12]:

$$\varepsilon_x(z, t) = \frac{1}{E_{сек}} (\Lambda[\sigma_x(z, t)] - \nu \cdot \Lambda[\sigma_y(z, t)]),$$

$$\varepsilon_y(z, t) = \frac{1}{E_{сек}} (\Lambda[\sigma_y(z, t)] - \nu \cdot \Lambda[\sigma_x(z, t)]),$$

где  $\Lambda[f(t)] = f(t) + \int_0^t f(\tau) \cdot \Gamma(t, \tau) d\tau$  - оператор наследственной ползучести,  $\Gamma(t, \tau)$  -

ядро ползучести. Из предыдущей системы несложно получить:

$$\Lambda[\sigma_x(z, t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x(z, t) + \nu \cdot \varepsilon_y(z, t)),$$

$$\Lambda[\sigma_y(z, t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y(z, t) + \nu \cdot \varepsilon_x(z, t)).$$

Очевидно, что в этом случае для однородного линейризованного упругого материала из (1) следует система уравнений:

$$\Lambda[\sigma_x(z, t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{\rho_x(t)} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_y(t)} \right) \cdot (z - \delta(t)),$$

$$\Lambda[\sigma_y(z, t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{\rho_y(t)} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_x(t)} \right) \cdot (z - \delta(t)). \quad (2)$$

**Уравнения равновесия. Определение координаты нейтрального слоя относительно середины прямоугольной пластины.** Исходя из того,

что касательные напряжения по предположению отсутствуют, и чистый изгиб происходит в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ , необходимо удовлетворить четыре уравнения равновесия [4–6]:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b \sigma_x dy dz = 0, & \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a \sigma_y dx dz = 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b (\sigma_x \cdot z) dy dz = M_x(t), & \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a (\sigma_y \cdot z) dx dz = M_y(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем три уравнения равновесия, определяющие в общем случае положение нейтрального слоя  $\delta(t)$  относительно середины высоты пластины (рис. 1), и радиусов кривизны  $\rho_x(t)$ ,  $\rho_y(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (y - \delta(t)) dy = 0, \quad \frac{1}{b} \Lambda[M_x(t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{\rho_x(t)} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_y(t)} \right) \int_{-h/2}^{h/2} (z - \delta(t)) \cdot z dz, \\ \frac{1}{a} \Lambda[M_y(t)] = \frac{E_{сек}}{1 - \nu^2} \left( \frac{1}{\rho_y(t)} + \nu \cdot \frac{1}{\rho_x(t)} \right) \int_{-h/2}^{h/2} (z - \delta(t)) \cdot z dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Окончательно из (4) можно получить решение:

$$\begin{aligned} \delta(t) = 0, \quad \frac{1}{\rho_x(t)} = \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \Lambda \left[ \frac{M_x(t)}{b} - \nu \frac{M_y(t)}{a} \right], \\ \frac{1}{\rho_y(t)} = \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \Lambda \left[ \frac{M_y(t)}{a} - \nu \frac{M_x(t)}{b} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

**Определение перемещений прямоугольной пластины при закреплении по углам.** При определении кривизн пластины, соответствующих напряженному состоянию чистого изгиба (5), можно получить систему дифференциальных уравнений, в случае гипотезы малости перемещений (пренебрежения изменения квадрата касательной к профилю прогиба):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) &= \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \Lambda \left[ \frac{M_x(t)}{b} - \nu \frac{M_y(t)}{a} \right], \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y, t) &= \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \Lambda \left[ \frac{M_y(t)}{a} - \nu \frac{M_x(t)}{b} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Несложно заметить, что, исходя из условий шарнирного закрепления в угловых точках  $\{(0,0);(0,b);(a,0);(a,b)\}$ , можно получить единственное решение системы (6) в виде:

$$\begin{aligned}w(x, y, t) &= \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \left( \Lambda \left[ \frac{M_x(t)}{b} - \nu \frac{M_y(t)}{a} \right] \cdot x \cdot (x-a) + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left[ \frac{M_y(t)}{a} - \nu \frac{M_x(t)}{b} \right] \cdot y \cdot (y-b) \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Пусть поперек пластины, закрепленной в углах на ее верхней поверхности, действует внешняя распределенная нагрузка с интенсивностью  $q(x, y, t) < 0$ . Будем предполагать, что нагрузка распределена по участку  $S(t)$  поверхности пластины  $q(x, y, t) \neq 0$  при  $(x, y) \in S(t)$  и  $q(x, y, t) = 0$  при  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b] \setminus S(t)$  (дополнению  $S(t)$  до прямоугольника  $[0, a] \times [0, b]$ , занятого пластиной). Будем предполагать, что выполнены два условия симметрии создаваемых нагрузкой  $q(x, y, t)$  моментов относительно середины пластины (рис. 2).

$$\int_0^{a/2} \int_0^b q(x, y, t) \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right) dx dy = - \int_{a/2}^a \int_0^b q(x, y, t) \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right) dx dy,$$

$$\int_0^a \int_0^{b/2} q(x, y, t) \cdot \left( y - \frac{b}{2} \right) dx dy = - \int_0^a \int_{b/2}^b q(x, y, t) \cdot \left( y - \frac{b}{2} \right) dx dy,$$

$$\int_0^{a/2} \int_0^b q(x, y, t) dx dy = \int_{a/2}^a \int_0^b q(x, y, t) dx dy,$$

$$\int_0^a \int_0^{b/2} q(x, y, t) dx dy = \int_0^a \int_{b/2}^b q(x, y, t) dx dy.$$



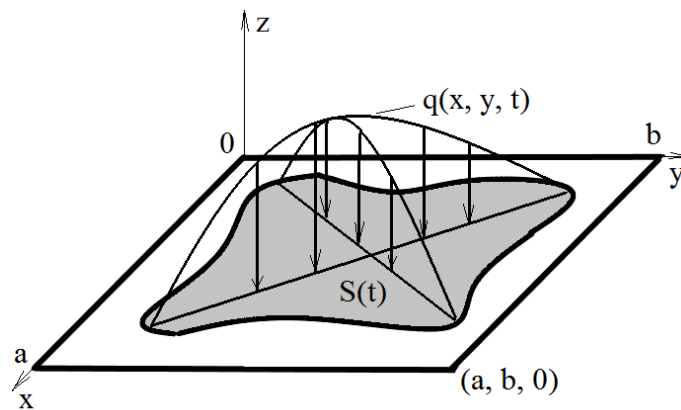


Рис. 2. – Действие распределенной поперечной нагрузки  $q(x, y, t)$  на поверхность пластины

Первая группа из 2-х уравнений гарантирует, что моменты на каждой из половин пластин равны, т.е. симметричны относительно средних линий по длине и ширине ( $\{x, b/2\}$  и  $\{a/2, y\}$ ). Вторая группа из двух уравнений гарантирует равенство главных векторов сил, приложенных к соответствующим половинам пластин. Поэтому главный вектор сил будет приложен к геометрическому пересечению двух указанных средних линий, т.е. центру пластины. Отсюда очевидно, что при любой распределенной нагрузке  $q(x, y, t)$ , удовлетворяющей последней системе уравнений, на каждую из опор приходится одна четвертая величины главного вектора нагрузки (если пластина шарнирно оперта в четырех угловых точках).

Тогда для расчета прогибов по формуле (7) можно использовать уравнения, определяющие моменты эквивалентные приложенной нагрузке  $q(x, y, t)$ :

$$M_x(t) = \int_0^{a/2} \int_0^b q(x, y, t) \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) dx dy,$$
$$M_y(t) = \int_0^a \int_0^{b/2} q(x, y, t) \cdot \left(y - \frac{b}{2}\right) dx dy. \quad (8)$$

**Пример расчета прогибов вязкоупругопластической пластины под собственным весом.** Поперечная нагрузка будет определяться по формуле

$q(x, y, t) = -\rho \cdot g \cdot h$ , а моменты, замещающие постоянную поперечную нагрузку, будут вычисляться по формулам (8)

$$M_x(t) = -\rho \cdot g \cdot h \int_0^{b/2} \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right) dx dy = \rho \cdot g \cdot h \cdot \frac{a^2 \cdot b}{8},$$

$$M_y(t) = -\rho \cdot g \cdot h \int_0^{b/2} \int_0^a \left(y - \frac{b}{2}\right) dx dy = \rho \cdot g \cdot h \cdot \frac{a \cdot b^2}{8}.$$

Учитывая, что моменты  $M_x$  и  $M_y$  в рамках рассматриваемого примера не зависят от времени, то

$$\Lambda \left[ \frac{M_x}{b} - \nu \frac{M_y}{a} \right] = \frac{\rho \cdot g \cdot h}{8} \cdot (a^2 - \nu \cdot b^2) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right),$$

$$\Lambda \left[ \frac{M_y}{a} - \nu \frac{M_x}{b} \right] = \frac{\rho \cdot g \cdot h}{8} \cdot (b^2 - \nu \cdot a^2) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right).$$

Тогда решение задачи определяется выражением:

$$w(x, y, t) = \frac{3}{2} \frac{\rho \cdot g \cdot h}{E_{сек} \cdot h^3} \cdot \left( (a^2 - \nu \cdot b^2) \cdot x \cdot (x - a) + (b^2 - \nu \cdot a^2) \cdot y \cdot (y - b) \right) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right).$$

Отметим, что поскольку наследственная ползучесть определяет стационарную (установившуюся) ползучесть, то при  $t = 0$  получаем решение линеаризованной задачи, с которого начинается стационарный процесс:

$$w(x, y, t) = \frac{3}{2} \frac{\rho \cdot g \cdot h}{E_{сек} \cdot h^3} \cdot \left( (a^2 - \nu \cdot b^2) \cdot x \cdot (x - a) + (b^2 - \nu \cdot a^2) \cdot y \cdot (y - b) \right)$$

Наибольший прогиб пластины под собственным весом определяется выражением  $w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$ :

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right) = -\frac{3}{8} \frac{\rho \cdot g}{E_{сек} \cdot h^2} \cdot (a^4 - 2 \cdot \nu \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right).$$

**Определение вязкоупругопластических перемещений прямоугольной пластины, защемленной в одной угловой точке и нагруженной моментами постоянной интенсивности по двум соседним сторонам.** При защемлении пластины в угловой точке, связанной с началом координат, из системы уравнений (6) следует:

$$w(x, y) = \frac{12}{E_{сек} \cdot h^3} \cdot \left( \Lambda \left[ \frac{M_x(t)}{b} - \nu \frac{M_y(t)}{a} \right] \cdot x^2 + \Lambda \left[ \frac{M_y(t)}{a} - \nu \frac{M_x(t)}{b} \right] \cdot y^2 \right).$$

Определение эквивалентных моментов для произвольной нагрузки  $q(x, y, t) < 0$ , действующей на верхнюю поверхность пластины:

$$M_x(t) = \int_0^b \int_0^a q(x, y, t) \cdot x \, dx dy,$$

$$M_y(t) = \int_0^b \int_0^a q(x, y, t) \cdot y \, dx dy.$$

Не приводя уже известных рассуждений, в случае рассмотрения примера вязкоупругопластического изгиба пластины под собственным весом в случае ее защемления в углу с координатами  $(0,0)$  приобретает вид:

$$w(x, y, t) = -6 \frac{\rho \cdot g \cdot h}{E_{сек} \cdot h^3} \cdot \left( (a^2 - \nu \cdot b^2) \cdot x^2 + (b^2 - \nu \cdot a^2) \cdot y^2 \right) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right).$$

Наибольший прогиб  $w(a, b, t)$  пластины, защемленной в одной угловой точке под действием собственного веса, определяется выражением:

$$w(a, b, t) = -6 \frac{\rho \cdot g \cdot h}{E_{сек} \cdot h^3} \cdot \left( (a^2 - \nu \cdot b^2) \cdot a^2 + (b^2 - \nu \cdot a^2) \cdot b^2 \right) \cdot \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right).$$

**Результаты и выводы.** Впервые предложено обобщение решения задачи чистого изгиба на вязкоупругопластический случай по наследственной теории ползучести при использовании гипотезы Арутюняна о постоянстве коэффициента поперечной деформации.

Впервые предложен метод пересчета распределенной поперечной нагрузки, приложенной на поверхности пластины в эквивалентные моменты постоянной интенсивности, зависящие от времени и приложенные на краях.

Впервые с помощью данной теории решена задача об изгибе пластины, заземленной в одной вершине, распределенной поперечной нагрузкой.

В качестве примеров приведены расчеты прямоугольных пластин под действием собственного веса.

### Литература

1. Бахарева Е.А. Прогнозирование предельной несущей способности балок при чистом изгибе с учетом разупрочнения материала: Автореф... дис. кан. наук. – Екатеринбург, 2013. 20 с.

2. Курилова С.Н. Прессованные цементно-минеральные композиты для дорожного строительства // Инженерный вестник Дона. 2017. №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4245](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4245).

3. Мальцева И.В. Влияние глинистого вещества на реологию пеномасс с различной концентрацией твердой фазы // Инженерный вестник Дона. 2017. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/3977](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/3977).

4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

5. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: ИНФРА-М, 2014. 512 с.

6. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.2. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. М.: Наука, 1978. 616 с.

7. Иявойнен С.В., Ларичкин А.Ю., Колодезев В.Е. Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учетом различных свойств на растяжение и

сжатие // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 430–446.

8. Li Z., Yang T., Luo W. An improved model for bending of thin viscoelastic plate on elastic foundation // Natural Science, 2009, Vol.1, N 2, pp. 120-123.

9. Zenkour A.M., Allam M.N.M., Sobhy M. Bending of a fiber-reinforced viscoelastic composite plate resting on elastic foundations // Archive of Applied Mechanics, 2011, V. 81, Issue 1, pp. 77–96.

10. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. Минск: БГУ, 2011. 543 с.

11. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Контактные задачи для тел с круговыми границами. Минск: Технопринт, 2000. 196 с.

12. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.

### References

1. Bahareva E.A. Prognozirovanie predel'noy nesushchey sposobnosti balok pri chistom izgibe s uchetom razuprochneniya materiala [Prediction of the ultimate bearing capacity of beams in pure bending taking into account the softening of the material]. Yekaterinburg. 2013. 20 p.

2. Kurilova S.N. Inzenernyj vestnik Dona. 2017. №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4245](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4245).

3. Maltseva I.V. Inzenernyj vestnik Dona. 2017. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/3977](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/3977).

4. Timoshenko, S. P. And Voynovskiy-Kriger S. Plastinki i obolochki [Plates and shells]. Moscow. 1966. 636 p.

5. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti [Resistance of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow. 2014. 512 p.

6. Filin A.P. Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela. T.2. Soprotivlenie materialov s elementami teorii sploshnykh sred i stroitel'noy



mekhaniki [Applied mechanics of a solid deformable body. Vol. 2. Resistance of materials with elements of continuum theory and structural mechanics]. Moscow. 1978. 616 p.

7. Ilavainen S.V., Larichkin A.Yu., Kolodezi V.E. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2018. T. 22. № 3. pp. 430–446.

8. Li Z., Yang T., Luo W. Natural Science. 2009. Vol.1. N 2. pp. 120-123.

9. Zenkour A.M., Allam M.N.M., Sobhy M. Archive of Applied Mechanics, 2011, V. 81, Issue 1, pp. 77–96.

10. Zhuravkov M. A., Starovoitov E. I. Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Mechanics of continua. Theory of elasticity and plasticity]. Minsk, 2011. 543 p.

11. Kravchuk A. S., Chigarev A.V. Kontaktnye zadachi dlya tel s krugovymi granitsami [Contact problems for bodies with circular boundaries]. Minsk, 2000. 196 p.

12. Rzhantsyn A. R. Teoriya polzuchesti. [Creep theory]. Moscow, 1968. 418 p.