К определению перемещений оболочек вариационно-энергетическим методом

С.В. Бурцева, Г.П. Стрельников

Расчет оболочек вариационно-энергетическим методом основан на принципе минимума полной потенциальной энергии системы (*Э*), численно равной разности работы внутренних сил (*A*) и внешних сил ($A_{вн}$). Задача решается в перемещениях. Компоненты перемещения произвольной точки срединной поверхности оболочки u^k вдоль осей криволинейной системы координат выбираются в виде бесконечных двойных рядов, члены которых состоят из произведения постоянных параметров q_{rs}^k, подлежащих определению и линейно независимых функций Φ_{rs}^k, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям

$$u^k = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \Phi_{rs}^k \, q_{rs}^k,$$

В статье [10] приводится выражение для работы внутренних сил в матричном виде в криволинейной ортогональной системе координат

$$A = E_1 q^T \left[\int_{\alpha^1} \int_{\alpha^2} F^T \, H_{11} H_{22} R^T N R F d\alpha_1 d\alpha_2 \right] q = E_1 q^T S q.$$

Матрица *F*, содержащая аппроксимирующие функции Φ_{rs}^k, матрицы *R*, *N* , зависящие от геометрии срединной поверхности оболочки, её толщины и материала приводятся в [10]. Матрица *R*, кроме коэффициентов первой и второй квадратичных форм, содержит символы Кристоффеля второго рода $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^2$ и Γ_{11}^2. В случае ортогональной системы координат они могут быть выражены через параметры Ляме следующим образом:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{H_{11,2}}{H_{11}}; \Gamma_{22}^1 = -\frac{H_{22}}{H_{11}^2} H_{22,1}; \Gamma_{12}^{12} = \frac{H_{22,1}}{H_{22}}; \Gamma_{11}^2 = -\frac{H_{11}}{H_{22}^2} H_{11,2} .$$

Здесь $H_{22,1}$ и $H_{11,2}$ производные параметров Ляме соответственно по первой и второй координатам. После подстановки символов Кристоффеля матрица *R* будет иметь вид:

$$
R=\begin{pmatrix}
0 & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{21} & 0 & 0 & 0 & R_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & R_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{37} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{41} & 0 & R_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{51} & R_{52} & 0 & R_{54} & 0 & R_{56} & 0 & 0 & R_{59} & 0 & 0 & R_{512} \\
R_{61} & R_{62} & 0 & 0 & R_{65} & R_{66} & R_{67} & 0 & R_{69} & 0 & 0 & R_{612} \\
R_{71} & R_{72} & 0 & 0 & R_{75} & R_{76} & R_{77} & 0 & R_{79} & 0 & 0 & R_{712} \\
R_{81} & R_{82} & 0 & 0 & 0 & R_{86} & 0 & R_{88} & R_{89} & 0 & 0 & R_{812}
\end{pmatrix}
$$

$$R_{12}=\frac{H_{11,2}}{H_{11}H_{22}};\ R_{13}=-\lambda_{11};\ R_{14}=\frac{1}{H_{11}};\ R_{21}=-\frac{H_{11,2}}{H_{11}H_{22}};\ R_{25}=\frac{1}{H_{11}};$$

$$R_{32}=-\frac{H_{22,1}}{H_{11}H_{22}};\ R_{37}=\frac{1}{H_{22}};R_{41}=\frac{H_{22,1}}{H_{11}};\ R_{43}=-\lambda_{22};\ R_{48}=\frac{1}{H_{22}}\ ;$$

$$R_{51}=-\frac{\lambda_{11,1}}{H_{11}};\ R_{52}=-\frac{\lambda_{22}H_{11,2}}{H_{11}H_{22}};\ \ R_{54}=-\frac{\lambda_{11}}{H_{11}};R_{56}=\frac{H_{11,1}}{H_{11}^3}\ ;\ R_{59}=-\frac{H_{11,2}}{H_{11}H_{22}^2};$$

$$R_{512}=-\frac{1}{H_{11}^2};\ R_{61}=\frac{\lambda_{11}H_{11,2}}{2H_{11}H_{22}};\ R_{62}=-\frac{\lambda_{11}H_{22,1}}{2H_{11}H_{22}}+\frac{\lambda_{22,1}}{H_{11}^2};$$

$$R_{65}=-\frac{\lambda_{11}}{2H_{11}}+\frac{\lambda_{22}}{H_{11}};\ R_{66}=-\frac{H_{11,2}}{H_{22}H_{11}^2};\ \ R_{67}=\frac{\lambda_{11}}{2H_{22}};R_{69}=-\frac{H_{22,1}}{H_{11}H_{22}^2};$$

$$R_{612}=\frac{1}{H_{11}H_{22}};\ R_{71}=-\frac{\lambda_{22}H_{11,2}}{2H_{11}H_{22}}+\frac{\lambda_{11,2}}{H_{22}};R_{72}=-\ \frac{\lambda_{22}H_{22,1}}{2H_{11}H_{22}};$$

$$R_{75}=\frac{\lambda_{22}}{2H_{11}};R_{76}=-\frac{H_{11,2}}{H_{22}H_{11}^2};R_{77}=\frac{\lambda_{11}}{H_{22}}-\frac{\lambda_{22}}{2H_{22}};R_{79}=-\frac{H_{22,1}}{H_{11}H_{22}^2};$$

$$R_{712}=\frac{1}{H_{11}H_{22}};R_{81}=\frac{\lambda_{11}H_{11,2}}{H_{11}^2};R_{82}=-\frac{\lambda_{22,2}}{H_{22}};R_{86}=-\frac{H_{22,1}}{H_{11}^2H_{22}};$$

$$R_{88}=-\frac{\lambda_{22}}{H_{22}};\ \ R_{89}=\frac{H_{22,2}}{H_{22}^2};\ \ R_{812}=-\frac{1}{H_{22}^2}.$$

$$E_1=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1+2\mu)};$$

$$q^T = ((q^1)^T\ (q^2)^T (q^3)^T); \quad (q^k)^T = \left(q_{11}^k \dots q_{rs}^k \dots q_{mn}^k \ \right), k = 1,2,3.$$

$H_{11},\ H_{22} -$ параметры Ляме.

Матрица

$$S = \int_{\alpha^1} \int_{\alpha^2} F^T\, H_{11} H_{22} R^T N R F d\alpha_1 d\alpha_2$$

является блочной симметричной матрицей порядка $3mn \times 3mn$

$$S = \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{pmatrix},\ \text{где}$$

$$S^{lk} = S^{kl} = \begin{pmatrix} S_{1111}^{kl} \dots S_{11vw}^{kl} \ \dots S_{11mn}^{kl} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ S_{rs11}^{kl} \dots\ S_{rsvw}^{kl} \dots\ S_{rsmn}^{k} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ S_{mn11}^{kl} \quad S_{mnvw}^{kl} \quad S_{mnmn}^{kl} \end{pmatrix} \text{ – матрица порядка } mn \times mn$$

$$\frac{\partial A}{\partial q_{rs}^k} = E_1 \left(\frac{\partial q^T}{\partial q_{rs}^k} S q + q^T S \frac{\partial q}{\partial q_{rs}^k} \right) = E_1(\ S + S^T\ ) q = 2 E_1 S q,\ \ k = 1,2,3;\ r = 1,2, \dots m; s = 1,2, \dots n.$$

$$\frac{\partial (q^k)^T}{\partial q_{rs}^k} = (0,0, \dots 1, \dots\ \ 0)\ \ ,\ \ k = 1,2,3;\ \ r = 1,2, \dots m; s = 1,2, \dots n.$$

Все элементы этой матрицы будут равны нулю, кроме rs –того элемента, равного единице.

Так как матрица S симметричная, то $S + S^T = 2S$.

Выражение для работы внешних сил имеет вид

$$A_{\text{вн}} = \sum_{k=1}^{3} \left[\int_{\alpha^1} \int_{\alpha^2} H_{11} H_{22} \nu L_k \Phi^{\text{к}}\, d\alpha_1 d\alpha_2 \right] q^k, \text{где}$$

$$\Phi^k = \left(\Phi_{11}^k \dots \Phi_{rs}^k \dots \Phi_{mn}^k \right); \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3).$$

$\nu_1, \nu_2, \nu_3 -$ проекция вектора интенсивности внешней нагрузки на оси прямоугольной декартовой системы координат.

$L_k^T = \left(l_1^k\ l_2^k\ l_3^k \right)$- матрица, содержащая косинусы углов между осями прямоугольной декартовой системы координат и векторами криволинейной системы координат, связанной со срединной поверхностью оболочки.

$$\frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{k}} = \sum_{k=1}^{3}\left[\iint_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22}\nu L_k \Phi^{\text{к}}\, d\alpha_1 d\alpha_2\right]\frac{\partial q^k}{\partial q_{rs}^{k}}.$$

Так как только один элемент матрицы $\frac{\partial q^k}{\partial q_{rs}^{k}}$ будет равен единице, а остальные нулю, то

$$\frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{k}} = \int_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22}\nu L_k \Phi_{rs}^{k}\, d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Если распределенная нагрузка действует вдоль оси x^3 прямоугольной декартовой системы координат (собственный вес конструкции), тогда вектор $\nu = (0,0,\nu_3)$ и

$$A_{\text{вн}} = \sum_{k=1}^{3}\left[\iint_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22}\nu_3 l_3^k \Phi^{\text{к}}\, d\alpha_1 d\alpha_2\right] q^k.$$

$$\frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{k}} = \int_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22}\nu_3 l_3^k \Phi_{rs}^{k}\, d\alpha_1 d\alpha_2.$$

В случае нагрузки интенсивности p, направленной по нормали к срединной поверхности оболочки, матрица $A_{\text{вн}}$ приобретает вид

$$A_{\text{вн}} = \sum_{k=1}^{3}\left[\iint_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22} p \Phi^{3}\, d\alpha_1 d\alpha_2\right] q^3.$$

$$\frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{1}} = \frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{2}} = 0; \quad \frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{3}} = \int_{\alpha^1}\int_{\alpha^2} H_{11}H_{22} p \Phi_{rs}^{3}\, d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Введем матрицу

$$\overline{A_{\text{вн}}^{\text{T}}} = \left(\overline{A_{\text{вн}}^{1}}, \overline{A_{\text{вн}}^{2}}, \overline{A_{\text{вн}}^{3}}\,)\right), \text{где}\ \overline{A_{\text{вн}}^{\text{к}}} = \left(\frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{11}^{k}} \dots . \frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs1}^{k}} \dots \frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{mn}^{k}}\right); k = 1,2,3.$$

Из условия стационарности полной потенциальной энергии системы *Э*=*A* - $A_{\text{вн}}$, получаем 3*mn* линейных уравнений для определения 3*mn* неизвестных коэффициентов q_{rs}^{k}.

$$\frac{\partial Э}{\partial q_{rs}^{k}} = \frac{\partial A}{\partial q_{rs}^{k}} - \frac{\partial A_{\text{вн}}}{\partial q_{rs}^{k}}, \ \ k = 1,2,3; \ \ r = 1,2, \dots m; s = 1,2, \dots n.$$

$$E_1 2Sq - \overline{A_{\text{вн}}} = 0; \quad q = \frac{\overline{A_{\text{вн}}}\, S^T}{2E_1}.$$

Литература:

1.Аксентян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К. Энергетический метод расчета оболочек усложненной формы [Текст]: Монография / К.Б. Аксентян. – Ростов: РИСИ, 1976г. – 320 с.

2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек [Текст]: Монография / А.Л. Гольденвейзер.− М. «Наука» ,1976г. – 512 с.

3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст]: Монография / Васидзу К.– М. «Мир», 1987г. – 542 с.

4. Кильчевский А.Л. Элементы тензорного исчисления и его приложение к механике [Текст]: Монография / А.Л. Кильчевский – М. ГИТТЛ, 1954г.–168с.

5.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки [Текст]: Монография / С.П. Тимошенко. – М. «Наука», 1966г. – 636 с.

6.Филин А. В. Элементы теории оболочек. Изд. второе, дополн. и перераб. [Текст]: Монография / А. В. Филин − Л.: Стройиздат, 1975г. – 256 с.

7. Koiter W.T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. –In: Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft. –Amsterdam: North-Holland, 1960, p. 12-33.

8. Reissner E. Variational considerations for elastic beams and shells. – Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1962, v.88, No.EMI, p. 23-57.

9. Литвинов В.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки. [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №1. – Режим доступа: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/722/ (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.

10. Бурцева С.В., Стрельников Г.П., Авилкин В.И. К расчету оболочек вариационно-энергетическим методом. [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4(2). – Режим доступа:

http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1291 (доступ свободный). – Загл. с экрана. – Яз. рус.